Pederíamos admitir outra situação:

Que na superfície em movimento P (r, t) apenas exiba velocidade tangencial

$$v_t$$

Nestas condições as relações (5 b) ainda são válidas e como

$$v_t \cdot n = 0 \qquad (57)$$

reduzem-se às condições fronteiras para os corpos em repouso:

$$n \times [H] = J_s \qquad (58\,a)$$

$$n \times [E] = 0 \qquad (58\,b)$$

$$n \cdot [D] = \rho_s \qquad (58\,c)$$

$$n \cdot [B] = 0 \qquad (58\,d)$$

$$n \cdot [J_s] = 0 \qquad (58\,e)$$

$$n \cdot [J] + \nabla_s \cdot J_s + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \qquad (58\,f)$$

*

* *

Uma vez que os resultados obtidos e constantes de (56) se suportaram nas leis de transformação das densidades de carga e de corrente superficiais para um deslocamento segundo a velocidade v normal à superfície, a generalização para $v \neq v_n$ exige alguma reflexão.

A fim de esclarecer este assunto consideremos S (x. y, z, t) e nesse referencial um plano paralelo ao eixo dos zz animado de movimento de translação de velocidade

$$v\, e_x \qquad (59\,a)$$

Seja n a normal a esse plano no ponto P (x, y, z, t).

Seja

$$\alpha = \measuredangle (n, e_x) \qquad (59\,b)$$

pelo que

$$n = \cos\alpha\ e_x + \operatorname{sen}\alpha\ e_y \qquad (59\,c)$$

Trabalharemos com a Transformação Especial de Lorentz pelo que se identificarão:

$$e'_x \equiv e_x \qquad e'_y \equiv e_y \qquad e'_z \equiv e_z \qquad (59\,d)$$

Admitamos sobre esse plano uma densidade de carga superficial ρ_s e uma densidade de corrente superficial J_s, resultante de uma integração de J e ρ numa espessura λ segundo n.

De acordo com a atitude tomada na secção 4, teremos que no instante $t = 0$ e no referencial S' (x', y', z', t') se observa uma normal

$$n' = \cos\alpha'\ e'_x + \operatorname{sen}\alpha'\ e'_y \qquad (59\,e)$$

no ponto P (x', y' z', t') do plano transformado.

As distribuições J' e ρ' conducentes a J'_s e ρ'_s resultarão de uma integração na espessura λ' segundo n', sendo fácil concluir que

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha} = \gamma \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} \qquad (59\,f)$$

Assim e atendendo a (8):

$$J'_{sx} = \gamma\,[J_{sx} - \rho_s v]\ \lambda'/\lambda \qquad (60\,a)$$

$$J'_{sy} = J_{sy}\ \lambda'/\lambda \qquad (60\,b)$$

$$J'_{sz} = J_{sz}\ \lambda'/\lambda \qquad (60\,c)$$

$$\rho'_s = \gamma \left[\rho_s - \frac{1}{c^2}\, v\, J_{sx}\right] \lambda'/\lambda \qquad (60\,d)$$

Posto isto partamos das condições fronteiras para corpos em repouso:

$$n' \times [H'] = J'_s \qquad (61\,a)$$

$$n' \cdot [D'] = \rho'_s \qquad (61\,b)$$

Esta condições desdobram-se em:

$$\cos\alpha'\ [H'_y] - \operatorname{sen}\alpha'\ [H'_x] = J'_{sz} \qquad (62\,a)$$

$$\cos\alpha'\ [H'_z] = -J'_{sy} \qquad (62\,b)$$

$$\operatorname{sen}\alpha'\ [H'_z] = J'_{sx} \qquad (62\,c)$$

acrescidas de

$$n' \cdot J'_s = J'_{sx} \cos\alpha' + J'_{sy} \operatorname{sen}\alpha' = 0 \qquad (62\,d)$$

o que aliás está implícito em (62 b) e (62 c)

Teremos ainda, de (61 b)

$$\cos\alpha'\ [D'_x] + \operatorname{sen}\alpha'\ [D'_y] = \rho'_s \qquad (62\,e)$$

Atendendo a (6), (7), (60) e (59 f) teremos:

$$\gamma \cos\alpha' \Big[[H_y] + v\,[D_z] \Big] - \operatorname{sen}\alpha' [H_x] = J_{sz}\, \gamma \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} \qquad (63\,a)$$

$$\gamma \cos\alpha' \Big[[H_z] - v\,[D_y] \Big] = -J_{sy}\, \gamma \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} \qquad (63\,b)$$

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha' \left[[H_z] - v\,[D_y] \right] = \gamma\,[J_{sx} - \rho_s v] \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (63\,c)$$

$$\cos \alpha' \,[D_x] + \gamma \operatorname{sen} \alpha' \left[[D_y] - \frac{v}{c^2} [H_z] \right] =$$

$$= \gamma \left[\rho_s - \frac{v}{c^2} J_{sx} \right] \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (63\,e)$$

o que simplificado conduz a

$$\cos \alpha \left[[H_y] + v\,[D_z] \right] - \operatorname{sen} \alpha\,[H_x] = J_{sz} \quad (64\,a)$$

$$\cos \alpha \left[- [H_z] + v\,[D_y] \right] = J_{sy} \quad (64\,b)$$

$$\operatorname{sen} \alpha \left[[H_z] - v\,[D_y] \right] = J_{sx} - \rho_s v \quad (64\,c)$$

$$\frac{1}{\gamma^2} \cos \alpha\,[D_x] + \operatorname{sen} \alpha \left[[D_y] - \frac{v}{c^2} [H_z] \right] =$$

$$= \rho - \frac{1}{c^2} v\,J_{sx} \quad (64\,e)$$

Salientando-se que (62 d) conduz a

$$\cos \alpha\,[J_{sx} - \rho_s v] + \operatorname{sen} \alpha\,J_{sy} = 0 \quad (64\,d)$$

Convirá ainda escrever a equação (64 e) sob a forma equivalente:

$$\cos \alpha\,[D_x] + \operatorname{sen} \alpha\,[D_y] - \frac{v'}{c^2} \cos \alpha\,[D_x] -$$

$$- \operatorname{sen} \alpha \frac{v}{c^2} [H_z] = \rho_s - \frac{1}{c^2} v\,J_{sx} \quad (64\,f)$$

Das equações (64) e designando

$$\cos \alpha\, v \quad (65\,a)$$

por

$$(v \,.\, n) \quad (65\,b)$$

em que, em (65 b), v tem carácter vectorial, resulta:

$$\cos \alpha\,[H_y] - \operatorname{sen} \alpha\,[H_x] + (v \,.\, n)\,[D_z] = J_{sz} \quad (66\,a)$$

$$- \cos \alpha\,[H_z] + (v \,.\, n)\,[D_y] = J_{sy} \quad (66\,b)$$

$$\operatorname{sen} \alpha\,[H_z] + (v \,.\, n)\,[D_x] = J_{sx} \quad (66\,c)$$

$$\cos \alpha\,[D_x] + \operatorname{sen} \alpha\,[D_y] = \rho_s \quad (66\,d)$$

As equações (66 a) a (66 c) equivalem em notação vectorial a:

$$n \times [H] + (v \,.\, n)\,[D] = J_s \quad (67\,a)$$

A equação (66 d) a

$$n \,.\, [D] = \rho_s \quad (67\,b)$$

Para as condições fronteiras

$$n' \times [E'] = 0$$

$$n' \,.\, [B'] = 0$$

obtinham-se por processo idêntico as condições fronteiras (56 b) e (56 d).

Somos assim conduzidos às condições fronteiras (56) mas agora procedendo com generalidade.

Conclui-se assim que apenas intervém a componente normal da velocidade v.

$$(v \,.\, n)$$

Deste modo, para um referencial em que as descontinuidades electrodinâmicas se confinem a uma superfície constante no tempo:

$$F\,(r) = 0$$

as condições fronteiras para outro referencial que se desloque tangencialmente sobre essa superfície são formalmente idênticas àquelas que se observam para os corpos em repouso.

Deste modo também fica clarificado que apenas tem interesse prático a consideração da velocidade normal

$$v_n = - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|}\, n = (v \,.\, n)\, n$$

E também fica esclarecido que a superfície

$$F\,(r, t) = 0$$

nada tem a ver com o deslocamento da matéria, haverá casos em que coincide, noutros não.

$F\,(r, t) = 0$ é uma superfície que descreve, no tempo do laboratório, o lugar geométrico das descontinuidades electrodinâmicas.

É assim uma superfície abstracta.

Este ponto que é importante é salientado por Costen e Adamson no trabalho referido na Bibliografia.

7. CONCLUSÕES

— Demonstrou-se que as condições fronteiras numa superfície em movimento se podem obter a partir das condições fronteiras dos corpos em repouso utilizando a Transformação de Lorentz que imobiliza num determinado referencial $S'\,(r', t')$ o ponto $P\,(r,t)$, em movimento, da referida superfície.

— As condições fronteiras assim estabelecidas coincidem com as condições fronteiras obtidas a

partir da forma integral das equações de Maxwell, utilizando os teoremas de Helmholtz associados a superfícies e contornos deformáveis no tempo e seus corolários.

— Nas referidas condições fronteiras apenas intervém a velocidade normal à superfície

$$v_n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} n = (v \cdot n)\, n$$

— Para o estabelecimento das referidas condições fronteiras houve que estabelecer as leis de transformação das densidades de carga e de corrente superficiais.

— Com generalidade, estabelecem-se as seguintes leis de transformação:

$$J'_{sv} = \gamma\,[J_s - \rho_s v]_v\, \gamma \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} =$$

$$= \gamma\,[J_s - \rho_s v]_v \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (68\,a)$$

$$J'_{st} = J_{st}\, \gamma \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} = J_{st} \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (68\,b)$$

$$\rho'_s = \gamma\,[\rho_s - \frac{v \cdot J_s}{c^2}]\, \gamma \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} =$$

$$= \gamma\,[\rho_s - \frac{v \cdot J_s}{c^2}] \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (68\,c)$$

$$\alpha' = \measuredangle\,(n', v) \quad \alpha = \measuredangle\,(n, v) \qquad (68\,d)$$

$$n' \cdot J'_s = 0 \qquad (68\,e)$$

$$\gamma \cos\alpha'/\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha'/\operatorname{sen}\alpha \rightarrow \tan\alpha' = \gamma \tan\alpha \qquad (68\,f)$$

As condições fronteiras num referencial que se mova tangencialmente em relação a uma superfície fixa são formalmente idênticas às dos corpos em repouso.

— A superfície F (r, t) sede de descontinuidades é uma superfície abstracta lugar geométrico, no «espaço», das descontinuidades que se observam no tempo «t» do laboratório.

— Finalmente convém salientar que se postulou que os integrais

$$\int_0^{\lambda'} \frac{\partial J'}{\partial t'} \frac{v}{c^2} x'\, dx' \qquad \int_0^{\lambda'} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \frac{v}{c^2} x'\, dx'$$

tendem para zero quando $\lambda' \rightarrow 0$

Fisicamente o facto é aceitável mas convirá, caso a caso, investigar o modelo que permita microscopicamente construir as densidades de corrente e de carga e bem assim as leis de variação expectáveis no espaço e no tempo de J' e ρ'.

É matéria cuja análise não incluimos no presente trabalho.

— Não queremos deixar de salientar que, no sentido de Sommerfeld, a velocidade

$$(v \cdot n)\, n$$

pode ser variável no espaço e no tempo.

— Finalmente, chama-se a atenção para o facto de as condições fronteiras serem um dado importante para resolver com elegância determinados problemas. Procedendo assim há que juntar às condições fronteiras as relações constitutivas que se observam no referencial do laboratório.

BIBLIOGRAFIA

Trabalhos que motivaram a presente comunicação:

[1] — **J. A. Kong** — Theory of Electromagnetic Waves — John Wiley — 1975.

[2] — **R. C. Costen** e **D. Adamson** — Three-Dimensional Derivation of the Electrodynamic Jump conditions and Momentun-Energy Laws at a Moving Boundary — Proceedings of the I. E. E. E., Vol. 53 — n.º 9 — Setembro — 1965.

Obras consultadas:

[3] — **A. Sommerfeld** — Electrodynamics, Academic Press — 1964.

[4] — **W. Pauli** — Theory of Relativity — Pergamon Press — 1972.

[5] — **C. Moller** — The Theory of Relativity — Clarendon Press — 1972.

O consórcio Brown Boveri na distribuição de energia

O disjuntor é um elemento base na distribuição de energia eléctrica

O nosso programa de fornecimento compreende:

- **Disjuntores pneumáticos**
- **Disjuntores de pequeno volume de óleo**
- **Disjuntores SF_6**

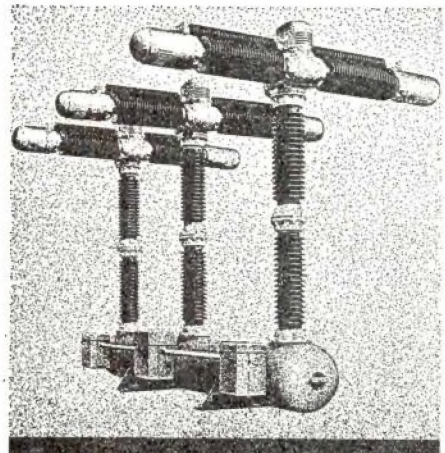
Planificamos e construimos instalações exteriores e interiores para todas as tensões até 765 kV

Os disjuntores BBC respondem a todas as exigências de serviço

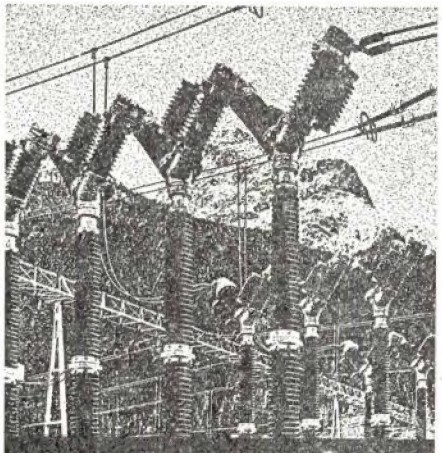
Condicionamentos técnicos, de serviço e económicos estão na base da escolha de um dos três sistemas de extinção do arco eléctrico

Com prazer resolvemos o vosso problema

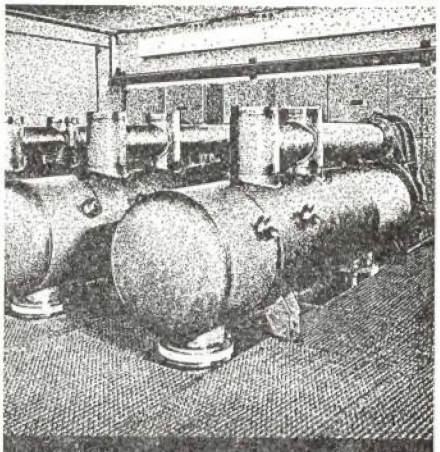
153564.VI



Disjuntores pneumáticos



Disjuntores de pequeno volume de óleo

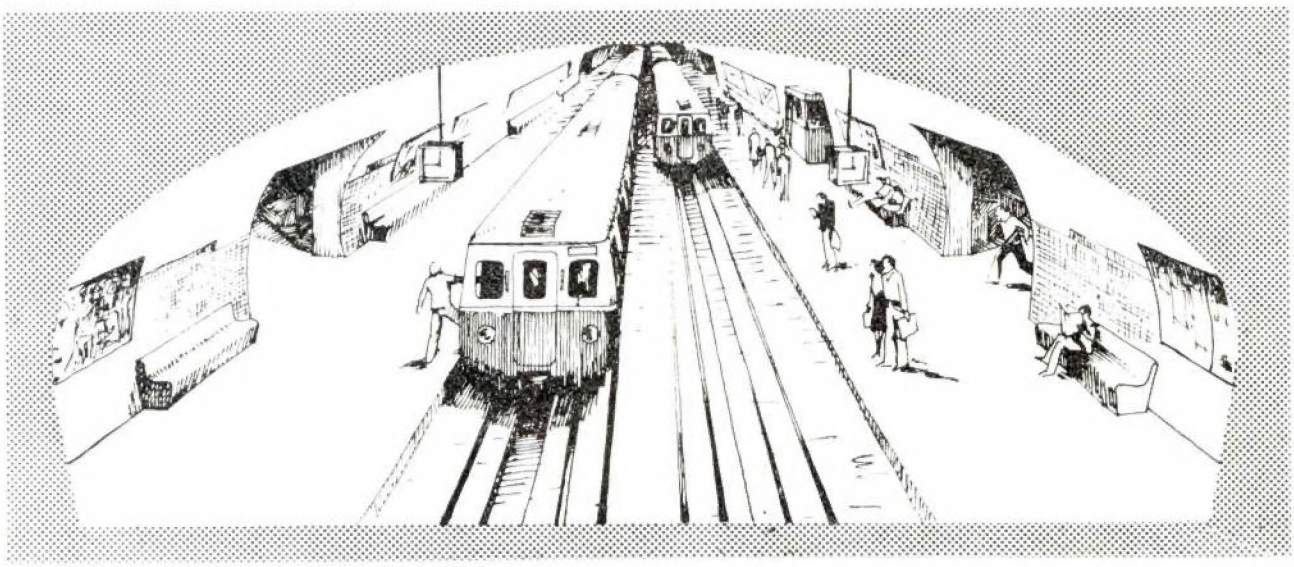


Disjuntores SF_6

Sociedade de Electricidade Brown Boveri, Lda.
Rua de Sá da Bandeira, 481 – 2º Dto. – PORTO

BBC
BROWN BOVERI

TÉCNICA VII



PARA:

ECONOMIZAR ENERGIA
COMBATER A POLUIÇÃO
POUPAR TEMPO
DEVOLVER AO PEÃO OS ESPAÇOS DE QUE CARECE

M METROPOLITANO

UMA SOLUÇÃO EFICAZ
NO DOMINIO DOS TRANSPORTES
COLECTIVOS URBANOS

METROPOLITANO DE LISBOA

NÚMERO 449/450 SETEMBRO/OUTUBRO 1978 ANO LIII VOLUME XL

C. D. U. 311.15:535.33

A memória de Mira Fernandes, que foi meu Professor.

Alguns aspectos da correlação de 3.ª ordem e do bispectro dos processos estacionários

F. E. REBELO SIMÕES *

RESUMO

Introduzem-se, como generalização da 2.ª ordem, os conceitos de correlação de 3.ª ordem e de espectro de 3.ª ordem (bispectro) dos processos estacionários, estudando-se as suas simetrias. Faz-se em seguida idêntica extensão para correlações e espectros cruzados. Estabelecem-se as relações entrada-saída de sistemas lineares invariantes para correlações e espectros. Considera-se o caso particular dos processos gaussianos estacionários de média nula, para os quais se verifica que o bispectro é nulo, deduzindo-se daí as aplicações práticas desta análise. Interpreta-se a seguir o bispectro como resultado de filtragens lineares, à semelhança do que se faz para o espectro de potência. Finalmente indicam-se alguns tópicos sobre a computação do espectro de potência e do bispectro, comentando-se os prós e os contras da análise espectral de 3.ª ordem.

SUMMARY

As generalization of 2nd order analysis, the concepts of 3rd order correlation and 3rd order spectrum (bispectrum) of stationary processes are introduced, and their symmetry properties are studied. Identical extension for cross correlations and cross spectra is made. The input-output relations for correlations and spectra are established in linear time-invariant systems. The gaussian case is considered in which the bispectrum is shown to be zero. Some practical applications of this fact are presented. Next the bispectrum is interpreted as a result of linear filtering operations, like power spectrum. Finally some topics on the computation of power spectrum and bispectrum are indicated, with comments on the advantages and limitations of 3rd order spectral analysis.

0. INTRODUÇÃO

Os processos estocásticos aparecem na Engenharia como modelos matemáticos adequados de certas grandezas aleatórias dependentes de um ou mais parâmetros. No presente artigo consideraremos apenas um parâmetro contínuo (t) que admitiremos ser o tempo e restringir-nos-emos a grandezas reais.

Assim, uma amostra ou realização do processo terá o aspecto de uma função aleatória real x(t), que é costume designar por *sinal*, principalmente na linguagem das Comunicações.

Notemos desde já o carácter duplamente aleatório deste sinal x(t), no tempo e no conjunto. Por um lado x(t) varia *em cada instante t* de amostra para amostra de forma aleatória, constituindo uma população $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... $x_n(t)$, ... com determinadas propriedades estatísticas que deverão ser conhecidas para que o processo possa ser analisado. Por outro lado x(t) varia *em cada amostra x(t)* de instante para instante de forma — em geral(1) — igualmente aleatória, obedecendo os valores $x(t_1)$, $x(t_2)$... $x(t_n)$..., a certas leis que precisarão também de ser conhecidas.

Este duplo comportamento tem de ser visto de forma global, pois os dois aspectos não são independentes.

* Centro de Análise e Processamento de Sinais das Universidades de Lisboa, e Instituto Superior Técnico.

(1) Este caso geral aqui considerado corresponde ao chamado processo *puramente* aleatório.

Manuscrito recebido para publicação em 11/4/77.

Assim, por exemplo, o conceito de *estacionaridade*, de 2.ª ou de 3.ª ordens, diz respeito ao modo como evolui no *tempo* a média de *conjunto* respectivamente dos produtos de 2.ª ordem $x(t)\ x(t+\tau)$, com τ fixo, ou de 3.ª ordem $x(t)\ x(t+\tau_1)\ x(t+\tau_2)$, com τ_1 e τ_2 fixos. A estacionaridade de qualquer das ordens existirá quando a respectiva média acima referida não depender de t [1].

Por sua vez o conceito de *ergodicidade* (para o caso estacionário) tem a ver com a comparação entre os valores médios de *conjunto* atrás definidos e os valores médios tomados ao *longo do tempo* para as diferentes realizações. A existência de ergodicidade implicará que estas médias temporais devem ser iguais para todas as amostras e coincidir com as médias de conjunto correspondentes. Por exemplo, se um processo estacionário de 2.ª ordem é ergódico tem-se necessariamente

$$E\ x(t)\ x(t+\tau) \overset{(2)}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ x(t+\tau)\ dt \tag{0.1}$$

No que vai seguir-se consideraremos apenas processos *estacionários até à 3.ª ordem,* (em sentido lato) isto é, processos para os quais se tem, para qualquer valor de t_0,

$$E\ x(t) = E\ x(t+t_0) = m_1 \tag{0.2}$$
$$E\ x(t)\ x(t+\tau) = E\ x(t+t_0)\ x(t+t_0+\tau) = m_2(\tau) \tag{0.3}$$
$$E\ x(t)\ x(t+\tau_1)\ x(t+\tau_2) = E\ x(t+t_0)\ x(t+t_0+\tau_1)\ x(t+t_0+\tau_2) = m_3(\tau_1, \tau_2) \tag{0.4}$$

Estas médias não dependem, portanto, da origem do tempo, sendo constantes para a 1.ª ordem e dependentes apenas dos intervalos entre os instantes considerados, para as 2.ª e 3.ª ordens.

Nas expressões apresentadas m_1 é o momento de 1.ª ordem ou *valor médio,* $m_2(\tau)$ é a função momento de 2.ª ordem e $m_3(\tau_1, \tau_2)$ a função momento de 3.ª ordem. Se nas expressões (0.3) e (0.4) subtrairmos a cada factor o valor médio m_1, obteremos as chamadas funções momentos centrais da ordem respectiva.

Em particular suporemos no que segue $m_1 = 0$, o que torna as funções momentos coincidentes com as funções momentos centrais. Estas funções coincidem ainda com as chamadas funções de correlação (ou simplesmente correlações). Acima da 3.ª ordem o conceito de correlação difere do de momento central, mas esse caso não será aqui abordado [3].

No presente artigo consideraremos ainda (§ 8.) o caso dos processos *ergódicos até à 3.ª ordem.* Isto implicará, no caso $m_1 = 0$, as seguintes igualdades válidas para todas as realizações do processo [cf. (0.1)].

$$E\ x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ dt = 0 \tag{0.5}$$

$$E\ x(t)\ x(t+\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ x(t+\tau)\ dt = \varphi(\tau) \tag{0.6}$$

$$E\ x(t)\ x(t+\tau_1)\ x(t+\tau_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ x(t+\tau_1)\ x(t+\tau_2)\ dt = \psi(\tau_1, \tau_2) \tag{0.7}$$

em que designamos por $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau_1, \tau_2)$, para evitar os índices 2 e 3, as correlações de 2.ª e 3.ª ordens.

As igualdades anteriores significam que o valor médio (neste caso, nulo) e as correlações de 2.ª e 3.ª ordens se podem obter (teoricamente) através de operações — médias temporais — efectuadas a partir duma única amostra, suposta de duração infinita.

---

(1) Este tipo de estacionaridade é por vezes chamado *fraco* ou em *sentido lato.*

(2) E f(t) g(t) significa «valor médio de conjunto do produto f(t) g(t)». Evitaremos usar parêntesis a seguir ao símbolo E para simplificar a notação.

(3) Ver por exemplo **Stratonovich**, 1963, Cap. 1.

A hipótese de estacionaridade é fundamental para a definição dos conceitos de espectro de frequência de 2.ª e 3.ª ordens e para o estabelecimento das propriedades aqui tratadas das correlações e respectivos espectros.

Quanto à hipótese de ergodicidade, ela permitir-nos-á abordar o problema da obtenção experimental dos espectros de 2.ª e 3.ª ordens por meio de operações realizadas sobre amostras isoladas.

1. CORRELAÇÃO DE 2.ª ORDEM [1]. SIMETRIAS

Como vimos, tem-se

$$\varphi(\tau) = E\, x(t)\, x(t+\tau), \qquad \text{com} \qquad Ex(t) = 0$$

Usando em (0.3) $t_0 = -\tau$, resulta

$$\varphi(\tau) = E\, x(t-\tau)\, x(t) = \varphi(-\tau) \tag{1.1}$$

isto é, a correlação de 2.ª ordem é uma função par. (Notemos que estamos apenas a tratar de processos *reais*. Caso contrário, o conceito de correlação obrigaria a uma ligeira alteração da definição de correlação, que passaria a ser, por exemplo, $\varphi(\tau) = E\, x^*(t)\, x(t+\tau)$, em que $x^*(t)$ representa o conjugado de $x(t)$. Mas não consideraremos aqui o caso *complexo*).

2. ESPECTRO DE 2.ª ORDEM OU ESPECTRO DE POTÊNCIA

Na maior parte dos processos puramente estocásticos (sem componentes periódicas) que servem de modelo aos sinais encontrados na Física e na Engenharia, verifica-se que

$$\lim_{\tau \to \infty} \varphi(\tau) = 0 \tag{2.1}$$

de tal modo que se tem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tau)|\, d\tau < \infty \tag{2.2}$$

Esta condição é suficiente, como se sabe, para a existência de transformada de Fourier de $\varphi(\tau)$

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \tag{2.3}$$

tendo-se

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{2.4}$$

---

[1] Tratamos aqui da 2.ª ordem apenas como meio de melhor compreender, por extensão natural, as propriedades das grandezas de 3.ª ordem que são objecto deste trabalho.

A grandeza $\Phi(\omega)$ é, por definição, o *espectro de 2.ª ordem* do processo, e tem o significado duma *densidade espectral* do valor quadrático médio $E\,x^2(t)$, usualmente chamado *potência* (1), como resulta de se ter

$$E\,x^2(t) = \varphi(o) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\,d\omega \tag{2.5}$$

É evidente que da propriedade (1.1) de simetria de $\varphi(\tau)$ resulta idêntica propriedade para $\Phi(\omega)$

$$\Phi(-\omega) = \Phi(\omega) \tag{2.6}$$

O espectro de potência é uma função real e par. Pode provar-se ainda que é não-negativa (2), como seria aliás de esperar do seu significado físico de densidade espectral de potência.

3. CORRELAÇÃO DE 3.ª ORDEM. SIMETRIAS

A definição de correlação de 3.ª ordem e a hipótese de estacionaridade vão permitir-nos obter as propriedades de simetria desta função.

Com efeito, de (0.4) resulta, por conveniente escolha de t_0, o conjunto de identidades

$$\begin{aligned}\psi(\tau_1,\tau_2) &= \psi(\tau_2,\tau_1)\\ &= \psi(-\tau_1,\tau_2-\tau_1)\\ &= \psi(\tau_2-\tau_1,-\tau_1)\\ &= \psi(\tau_1-\tau_2,-\tau_2)\\ &= \psi(-\tau_2,\tau_1-\tau_2)\end{aligned} \tag{3.1}$$

como se pode verificar, fazendo por exemplo $t_0 = -\tau_1$ em (0.4).

Tem-se então

$$\psi(\tau_1,\tau_2) = E\,x(t-\tau_1)\,x(t)\,x(t-\tau_1+\tau_2) = \psi(-\tau_1,\tau_2-\tau_1),$$ que é a 2.ª das identidades (3.1)

Estas relações (3.1) exprimem afinal a equivalência entre as expressões que se obtêm para a correlação de 3.ª ordem $\psi(\tau_1,\tau_2)$ escrita sob a forma

$$\psi(\tau_1,\tau_2) = E\,x(t_1)\,x(t_2)\,x(t_3) = \psi(t_2-t_1,t_3-t_1) \tag{3.2}$$

quando se permutam os instantes t_1, t_2, t_3 das 3! maneiras possíveis, alterando apenas a ordem dos 3 factores.

Por exemplo, se tomarmos a permutação t'_1, t'_2, $t'_3 = t_2$, t_3, t_1, virá

$$\psi(\tau_1,\tau_2) = E\,x(t_2)\,x(t_3)\,x(t_1) = E\,x(t'_1)\,x(t'_2)\,x(t'_3) =$$

$$= \psi(t'_2-t'_1,t'_3-t'_1) = \psi(t_3-t_2,t_1-t_2) = \psi(\tau_2-\tau_1,-\tau_1),$$ que é a 3.ª das identidades (3.1)

Esta forma de proceder é aliás a mais aconselhável para ordens superiores à 3.ª

As simetrias de $\psi(\tau_1,\tau_2)$ dadas por (3.1) correspondem à partição do plano $(\tau_1\,\tau_2)$ em seis sectores equivalentes, definidos pelos eixos principais e pelo bissector dos quadrantes ímpares. (Fig. 3.1).

---

(1) Se $x(t)$ é uma tensão aos terminais duma resistência, $x^2(t)$ é proporcional à potência instantânea. Nos processos ergódicos $E\,x^2(t)$ será proporcional à potência (média) do sinal. Por isso é usual chamar a $\Phi(\omega)$ o espectro de potência.

(2) Ver por exemplo **Davenport & Root**, 1958, Cap. 6.

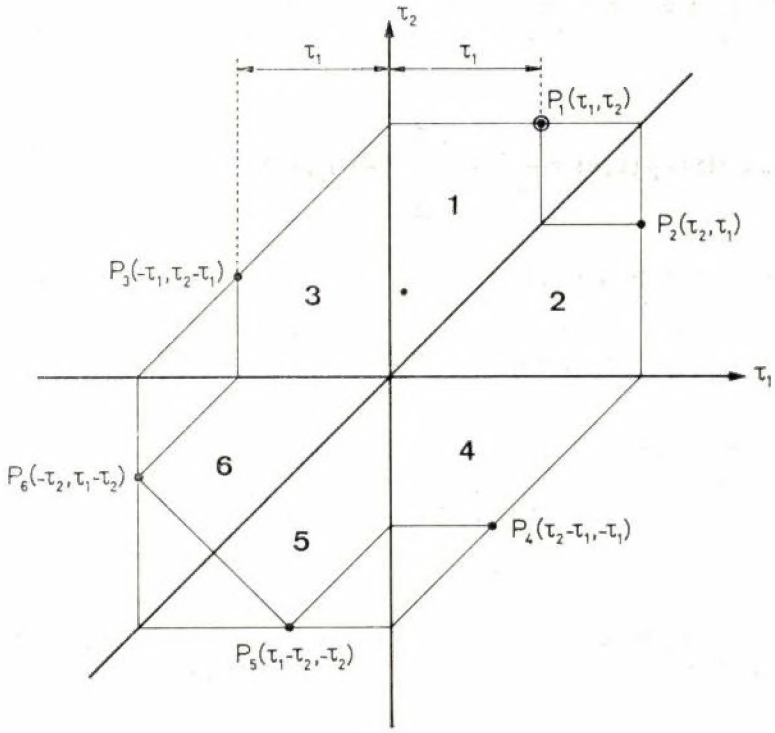


Fig. 3.1

Com efeito, se o ponto $P_1(\tau_1, \tau_2)$ percorrer o sector 1 ($\tau_2 \geqslant \tau_1 \geqslant 0$), por exemplo, o ponto homólogo $P_4(\tau'_1, \tau'_2) = P_4(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1)$ que resulta da 3.ª identidade (3.1) percorrerá o quadrante 4, por se ter a implicação

$$\tau_2 \geqslant \tau_1 \geqslant 0 \Rightarrow \tau'_1 \geqslant 0, \tau'_2 \leqslant 0$$

Da mesma forma se obtêm os restantes sectores. A cada ponto dum sector corresponde um ponto homólogo em cada um dos outros, no qual a correlação $\psi(\tau_1, \tau_2)$ toma o mesmo valor. Deste modo, o conhecimento de $\psi(\tau_1, \tau_2)$ num dos sectores é suficiente para determinar esta função em todo o plano.

4. ESPECTRO DE 3.ª ORDEM OU BISPECTRO

Tal como para a 2.ª ordem verifica-se, em grande parte dos processos encontrados na prática, a condição

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\tau_1, \tau_2)| \, d\tau_1 \, d\tau_2 < \infty \tag{4.1}$$

que é suficiente para a existência de uma transformada dupla de Fourier de $\psi(\tau_1, \tau_2)$. Tem-se assim

$$\Psi(\omega_1, \omega_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau_1, \tau_2) \, e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} \, d\tau_1 \, d\tau_2 \tag{4.2}$$

$$\psi(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega_1, \omega_2) \, e^{j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} \, d\omega_1 \, d\omega_2 \tag{4.3}$$

A grandeza $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ é, por definição, o *espectro de 3.ª ordem* ou *bispectro* do processo e parece ter o significado duma *densidade espectral a 2 dimensões* do valor cúbico médio $E\,x^3(t)$, como resulta de se ter

$$E\,x^3(t) = \psi(o, o) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega_1, \omega_2)\, d\omega_1 d\omega_2 \tag{4.4}$$

Na realidade o bispectro $\Psi(\omega_1, \omega_2)$, ao contrário do espectro de potência $\Phi(\omega)$, é em geral complexo, e apenas a sua parte real contribui efectivamente para o valor médio. Veremos isto adiante.

Para uma interpretação da parte imaginária, ver o § 8.

As simetrias do bispectro $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ pdem obter-se como resultado das simetrias da correlação de 3.ª ordem $\psi(\tau_1, \tau_2)$.

Assim, por exemplo, da relação de simetria

$$\psi(\tau_1, \tau_2) = \psi(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1)$$

tem-se

$$\Psi(\omega_1, \omega_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau_1, \tau_2)\, e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)}\, d\tau_1\, d\tau_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1)\, e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)}\, d\tau_1\, d\tau_2$$

Fazendo $\tau_2 - \tau_1 = \tau'_1$ e $-\tau_1 = \tau'_2$ o último integral (1) pode escrever-se

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau'_1, \tau'_2)\, e^{-j[\omega_2 \tau'_1 - (\omega_1 + \omega_2)\tau'_2]}\, d\tau'_1\, d\tau'_2 = \Psi(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2)$$

De forma semelhante se podem obter as restantes relações, resultando o conjunto de identidades

$$\begin{aligned} \Psi(\omega_1, \omega_2) &= \Psi(\omega_2, \omega_1) \\ &= \Psi(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) \\ &= \Psi(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1) \\ &= \Psi(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) \\ &= \Psi(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Pode provar-se (2) uma regra simples para escrever imediatamente estas equivalências: consiste em interpretar $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ como possuindo 3 variáveis $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ligadas pela relação $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, e proceder à permutação destas 3 variáveis, explicitando como argumento de Ψ apenas as 2 primeiras (apenas 2 são independentes), e substituindo sempre ω_3 por $-\omega_1 - \omega_2$.

Por exemplo

$$\Psi(\omega_1, \omega_2) <> \Psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Psi(\omega_3, \omega_2, \omega_1) <>$$
$$<> \Psi(\omega_3, \omega_2) = \Psi(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2)$$

que é a 5.ª das identidades (4.5).

---

(1) Notar que o jacobiano $\dfrac{\partial(\tau_1, \tau_2)}{\partial(\tau'_1, \tau'_2)}$ é igual a 1.

(2) Ver por exemplo **Brillinger & Rosenblatt**, 1967.

Estas relações de simetria (4.5) correspondem à definição de seis sectores numerados de 1 a 6 no plano $(\omega_1\ \omega_2)$ (Fig. 4.1).

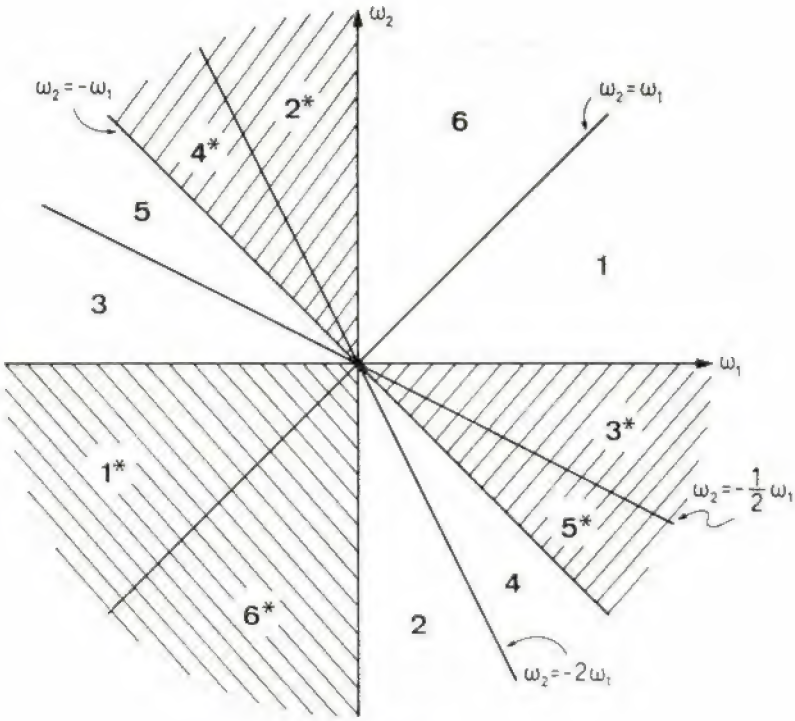


Fig. 4.1

Com efeito suponhamos um ponto $P_1\ (\omega_1, \omega_2)$ que percorre o sector 1 $(\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant 0)$. A 5.ª identidade (4.5) por exemplo, define um ponto homólogo $P_3\ (\omega'_1, \omega'_2) = P_3\ (-\omega_1 - \omega_2, \omega_2)$, onde o bispectro toma o mesmo valor que em P_1, e que percorrerá o sector 3, dada a implicação

$$\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant \omega'_2 \leqslant -\frac{1}{2}\omega'_1$$

Da mesma forma se obtêm os sectores 2, 4, 5, 6.. Estes seis sectores não preenchem, no entanto, completamente o plano $(\omega_1\ \omega_2)$, restando outros tantos verticalmente opostos aos anteriores, onde o bispectro se pode calcular facilmente (sectores indicados com asterisco). Isto deve-se à existência da relação de simetria óbvia

$$\Psi\ (-\omega_1, -\omega_2) = \Psi^*\ (\omega_1, \omega_2) \tag{4.6}$$

que resulta directamente da definição (4.2) de $\Psi\ (\omega_1, \omega_2)$.

Assim

$$\Psi\ (-\omega_1, -\omega_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi\ (\tau_1, \tau_2)\ e^{j\,(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)}\ d\tau_1\, d\tau_2 = \Psi^*(\omega_1, \omega_2)$$

dado o carácter real da grandeza $\psi\ (\tau_1, \tau_2)$.

Nestas condições, o conhecimento do bispectro num destes doze sectores determinará completamente o seu conhecimento em todo o plano $(\omega_1\ \omega_2)$.

A Fig. 4.2 mostra como se podem obter os cinco pontos homólogos de cada ponto P_1 do sector 1. Os seis pontos restantes (onde o bispectro toma um valor conjugado do anterior) obtêm-se por simetria em relação à origem.

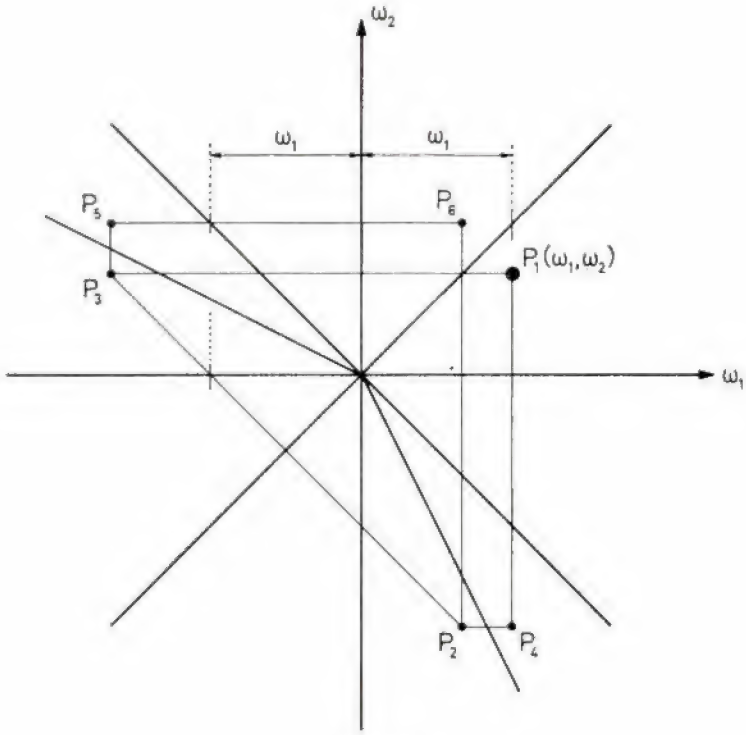


Fig. 4.2

Em face do que fica dito podemos escrever a relação (4.4) utilizando apenas metade do plano $(\omega_1\ \omega_2)$, desde que substituamos Ψ por $2\,\mathrm{Re}\,\{\Psi\}$. Por outro lado as simetrias estudadas reduzem-nos o domínio de integração a um dos seis sectores numerados de 1 a 6, dada a equivalência entre os pontos homólogos dos sectores e o facto de o Jacobiano das várias transformações $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega'_1, \omega'_2$ entre os sectores ser igual à unidade.

Nestas condições, escolhendo por exemplo o sector 1, vem

$$E\ x^3(t) = \frac{3}{\pi^2} \int_{\omega_1 = 0}^{\infty} \int_{0}^{\omega_1} \mathrm{Re}\,\{\Psi\,(\omega_1, \omega_2)\}\, d\omega_1\, d\omega_2 \tag{4.7}$$

que mostra que é a parte real do bispectro que se deve interpretar como a densidade espectral do valor cúbico médio, ou seja, a contribuição de cada par de frequências para esse valor. (Ver ainda o § 8).

5. CORRELAÇÕES E ESPECTROS CRUZADOS

Em muitas aplicações, nomeadamente no estudo dos Sistemas, tem interesse a extensão dos conceitos anteriores de funções de correlação e respectivos espectros a mais do que um processo.

Assim, se forem $\{\,x(t)\,\}$ e $\{\,y(t)\,\}$ dois processos estacionários de 2.ª ordem, de valores médios nulos, define-se como *correlação cruzada de 2.ª ordem* a grandeza

$$\varphi_{xy}(t_1, t_2) = E\ x(t_1)\, y\,(t_2) \tag{5.1}$$

em que $x(t)$ e $y(t)$ são realizações dos processos referidos.

Se esta função $\varphi_{xy}(t_1, t_2)$ apenas depender da diferença $t_2 - t_1$, diz-se que os dois processos são *estacionariamente correlacionados* (de 2.ª ordem).

Podemos então escrever aquela função como de uma só variável, tal como fizemos para o caso do processo único.

$$\varphi_{xy}(t, t+\tau) = \varphi_{xy}(\tau) = E\ x(t)\, y(t+\tau) \tag{5.2}$$

Nestas cndições define-se o *espectro cruzado* $\Phi_{xy}(\omega)$

$$\Phi_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\tau)\ e^{-j\omega\tau}\, d\tau \tag{5.3}$$

tendo-se então

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\omega)\ e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{5.4}$$

para o que basta a condição, encontrada na prática,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, \varphi_{xy}(\tau)\, |\, d\tau < \infty \tag{5.5}$$

Quanto às simetrias, repetindo os raciocínios usados nos § § 1. e 2., obtém-se, para a correlação cruzada

$$\varphi_{xy}(-\tau) = \varphi_{yx}(\tau) \tag{5.6}$$

e para o espectro cruzado

$$\Phi_{xy}(-\omega) = \Phi_{yx}(\omega) \tag{5.7}$$

Da mesma forma, se tivermos três processos $\{ x(t) \}$, $\{ y(t) \}$ e $\{ z(t) \}$ estacionários de 3.ª ordem, de valores médios nulos, define-se como *correlação cruzada de 3.ª ordem* a grandeza

$$\psi_{xyz}(t_1, t_2, t_3) = E\ x(t_1)\, y(t_2)\, z(t_3) \tag{5.8}$$

Se esta função depender apenas das diferenças entre os instantes considerados, diz-se que os três processos são *estacionariamente correlacionados* (de 3.ª ordem).

Podemos então escrever, tal como no caso de um único processo, e referindo as diferenças de tempo ao instante t_1, que representaremos simplesmente por t,

$$\psi_{xyz}(t, t+\tau_1, t+\tau_2) = E\ x(t)\, y(t+\tau_1)\, z(t+\tau_2) = \psi_{xyz}(\tau_1, \tau_2) \tag{5.9}$$

Nestas condições, e verificando-se habitualmente a condição

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |\, \psi_{xyz}(\tau_1, \tau_2)\, |\, d\tau_1\, d\tau_2 < \infty \tag{5.10}$$

define-se o *bispectro cruzado* $\Psi_{xyz}(\omega_1, \omega_2)$

$$\Psi_{xyz}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{xyz}(\tau_1, \tau_2)\ e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)}\, d\tau_1\, d\tau_2 \tag{5.11}$$

tendo-se então

$$\psi_{xyz}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_{xyz}(\omega_1, \omega_2)\, e^{j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)}\, d\omega_1\, d\omega_2 \tag{5.12}$$

Quanto às simetrias, se repetirmos o raciocínio do § 3., obteremos para as correlações cruzadas o seguinte conjunto de identidades

$$\begin{aligned} \psi_{xyz}(\tau_1, \tau_2) &= \psi_{xzy}(\tau_2, \tau_1) \\ &= \psi_{yxz}(-\tau_1, \tau_2 - \tau_1) \\ &= \psi_{yzx}(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1) \\ &= \psi_{zyx}(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2) \\ &= \psi_{zxy}(-\tau_2, \tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Procedendo agora para o bispectro cruzado como fizemos no § 4. obtêm-se as seguintes simetrias

$$\begin{aligned} \Psi_{xyz}(\omega_1, \omega_2) &= \Psi_{xzy}(\omega_2, \omega_1) \\ &= \Psi_{zyx}(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) \\ &= \Psi_{zxy}(-\omega_1 - \omega_2, -\omega_1) \\ &= \Psi_{yzx}(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) \\ &= \Psi_{yxz}(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Resta dizer que todos estes conceitos e propriedades ,tanto na 2.ª ordem como na 3.ª ordem, degeneram nos anteriormente tratados do processo único, quando se faz $x(t) = y(t)$ — 2.ª ordem — ou $x(t) = y(t) = z(t)$ — 3.ª ordem.

6. RELAÇÕES ENTRADA-SAÍDA DE SISTEMAS LINEARES INVARIANTES, PARA CORRELAÇÕES E ESPECTROS

Se for $h(t)$ a resposta dum sistema linear invariante no tempo à função delta de Dirac $\delta(t)$, sabemos que se tem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\mu)\, h(\mu)\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x(\mu)\, h(t-\mu)\, d\mu \tag{6.1}$$

em que $x(t)$ e $y(t)$ são respectivamente os sinais de entrada e de saída do sistema.

Dado que, como dissemos atrás, as correlações cruzadas e respectivos espectros contêm como caso particular as correlações e espectros simples, trataremos aqui do caso mais geral de dois ou três sistemas, conforme a ordem a estudar.

Assim, consideremos dois sistemas lineares invariantes, definidos pelas respostas $h_1(t)$ e $h_2(t)$, e calculemos as correlações cruzadas de 2.ª ordem à saída, supondo os processos de entrada $\{x_1(t)\}$ e $\{x_2(t)\}$ estacionariamente correlacionados e de médias nulas (Fig. 6.1).

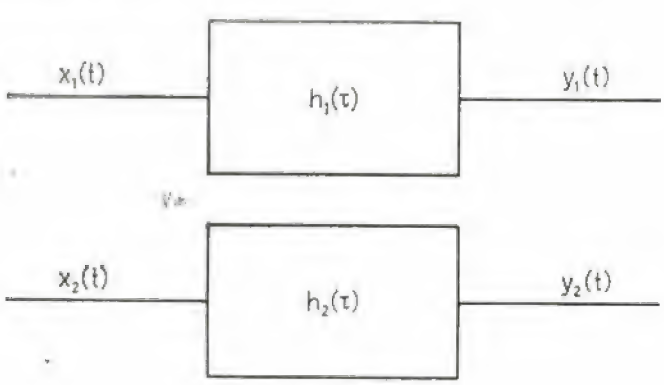


Fig. 6.1

Teremos em primeiro lugar, em virtude de (6.1)

$$E\, y_1(t) = H_1(0)\, E\, x_1(t) = 0$$
$$E\, y_2(t) = H_2(0)\, E\, x_2(t) = 0 \qquad (6.2)$$

em que $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$ são as funções de transferência dos sistemas, dadas por

$$H_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad i = 1, 2 \qquad (6.3)$$

As relações (6.2) mostram-nos que os valores médios dos sinais de saída dos sistemas são nulos como os de entrada, pelo que as correlações cruzadas à saída serão dadas por

$$\varphi_{y_1 y_2}(t_1, t_2) = E\, y_1(t_1)\, y_2(t_2) = E \iint_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1-\mu)\, x_2(t_2-\nu)\, h_1(\mu)\, h_2(\nu)\, d\mu\, d\nu$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi_{x_1 x_2}(t_1-\mu, t_2-\nu)\, h_1(\mu)\, h_2(\nu)\, d\mu\, d\nu \,^{(1)} \qquad (6.4)$$

Vemos que $\varphi_{y_1 y_2}(t_1, t_2)$ dependerá de t_1 e t_2 através da diferença $t_2 - t_1$, se $\varphi_{x_1 x_2}(t_1-\mu, t_2-\nu)$ também o fizer. Isto é, a estacionaridade correlacionada dos processos de entrada assegura a dos processos de saída (2).

No caso presente suporemos $\{ x_1(t) \}$ e $\{ x_2(t) \}$ estacionariamente correlacionados. Nestas condições, designando $t_2 - t_1$ por τ e $\nu - \mu$ por ξ, a integração (6.4) fornece a relação

$$\varphi_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{x_1 x_2}(\tau-\xi)\, \varphi_{h_1 h_2}(\xi)\, d\xi \qquad (6.5)$$

em que

$$\varphi_{h_1 h_2}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\mu)\, h_2(\mu+\nu)\, d\mu \qquad (6.6)$$

Conclusão:

A correlação cruzada de 2.ª ordem dos processos de saída obtém-se da correlação correspondente de entrada, através da sua convolução com a função de correlação cruzada das respostas $h_1(t)$ e $h_2(t)$ dos dois sistemas.

---

(1) Prova-se que se se verificar a condição $\int_a^b E\,|\,x(t)\,|\,dt < \infty$ para um processo $\{ x(t) \}$, se pode escrever $E \int_a^b x(t)\,dt = \int_a^b E\,x(t)\,dt$, tendo-se ainda $\int_a^b |\,x(t)\,|\,dt, < \infty$. Ver **Davenport & Root**, 1958, cap. 4, pág. 65

(2) Esta condição é suficiente, mas não necessária.

Estes produtos de convolução têm uma correspondência no domínio da frequência em termos de produtos simples, ou seja

$$\Phi_{y_1y_2}(\omega) = \Phi_{x_1x_2}(\omega)\,\Phi_{h_1h_2}(\omega) \tag{6.7}$$

em que $\Phi_{h_1h_2}(\omega)$ é a transformada de Fourier de $\varphi_{h_1h_2}(\xi)$, dada por

$$\begin{aligned}\Phi_{h_1h_2}(\omega) &= H_1(-\omega)\,H_2(\omega) \\ &= H_1^*(\omega)\,H_2(\omega), \text{ por ser } h_1(t) \text{ real}\end{aligned} \tag{6.8}$$

Conclui-se assim que o espectro cruzado à saída dos dois sistemas é igual ao produto do espectro cruzado das entradas pela função $H_1(-\omega)\,H_2(\omega)$, que podemos denominar por *função de transferência cruzada de 2.ª ordem.*

Notemos que se podem particularizar estes resultados para os casos $h_1 = h_2$ e/ou $x_1 \equiv x_2$.

A generalização para a 3.ª ordem destas relações entrada-saída não oferece dificuldade.

Assim, considerando três sistemas lineares invariantes (Fig. 6.2) definidos por $h_1(t)$, $h_2(t)$ e $h_3(t)$ e três processos de entrada $\{x_1(t)\}$, $\{x_2(t)\}$, $\{x_3(t)\}$

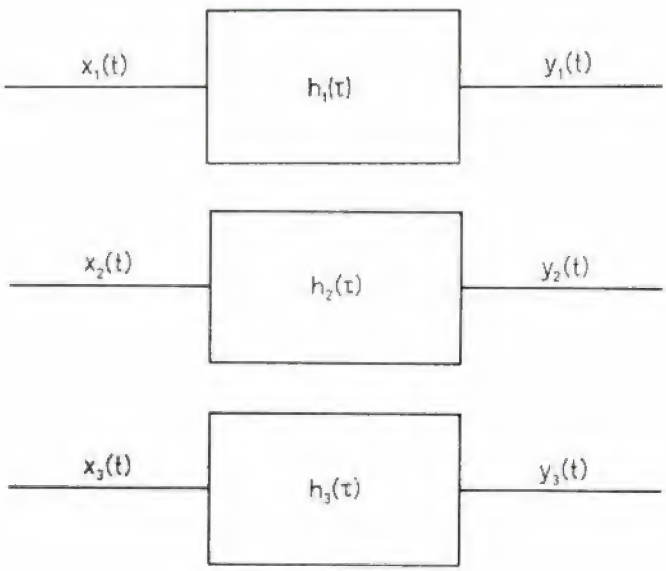


Fig. 6.2

estacionariamente correlacionados de 3.ª ordem, e de médias nulas, tem-se

$$\psi_{y_1y_2y_3}(t_1, t_2, t_3) = E\; y_1(t_1)\, y_2(t_2)\, y_3(t_3) \tag{6.9}$$

e por um raciocínio semelhante ao anterior, concluiremos primeiro da estacionaridade correlacionada dos processos de saída, obtendo finalmente a relação

$$\psi_{y_1y_2y_3}(\tau_1, \tau_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{x_1x_2x_3}(\tau_1-\xi_1, \tau_2-\xi_2)\;\psi_{h_1h_2h_3}(\xi_1, \xi_2)\;d\xi_1\,d\xi_2 \tag{6.10}$$

em que

$$\psi_{h_1h_2h_3}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\mu)\,h_2(\mu+\xi_1)\,h_3(\mu+\xi_2)\,d\mu \tag{6.11}$$

ou seja:

A correlação cruzada de 3.ª ordem dos processos de saída obtém-se da correlação correspondente de entrada através da dupla convolução desta com a função de correlação cruzada das respostas $h_1(t)$, $h_2(t)$ e $h_3(t)$ dos três sistemas.

Tal como para a 2.ª ordem, estas relações traduzem-se no domínio da frequência por simples produtos

$$\Psi_{y_1y_2y_3}(\omega_1, \omega_2) = \Psi_{x_1x_2x_3}(\omega_1, \omega_2)\ \Psi_{h_1h_2h_3}(\omega_1, \omega_2) \tag{6.12}$$

em que $\Psi_{h_1h_2h_3}(\omega_1, \omega_2)$ é a transformada dupla de Fourier de $\psi_{h_1h_2h_3}(\xi_1, \xi_2)$ dada por

$$\Psi_{h_1h_2h_3}(\omega_1, \omega_2) = H_1(-\omega_1-\omega_2)\ H_2(\omega_1)\ H_3(\omega_2) \tag{6.13}$$

$$= H_1^*(\omega_1+\omega_2)\ H_2(\omega_1)\ H_3(\omega_2), \text{ por ser } h_1(t) \text{ real}$$

Também estes resultados são susceptíveis de particularização, tanto no que se refere à igualdade entre os sistemas (todos ou apenas dois deles), como no que se refere aos processos de entrada ($x_1 \equiv x_2 \equiv x_3$ ou, por exemplo, $x_1 \equiv x_2 \neq x_3$)

7. O CASO GAUSSIANO. IMPORTÂNCIA DA 3.ª ORDEM

Como se sabe, um processo estocástico diz-se gaussiano se, para qualquer conjunto finito de instantes $\{t_1, t_2, \ldots\ldots t_N\}$, as variáveis aleatórias $\{x_1, x_2, \ldots x_N\}$, com $x_n = x(t_n)$, têm uma distribuição conjunta gaussiana ou multinormal.

Isto significa que se tem para a função densidade de probabilidade conjunta a expressão (1)

$$p(x_1, x_2 \ldots x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det\Lambda)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{nk}(x_n-m_n)(x_k-m_k)\right] \tag{7.1}$$

em que

$$m_n = E\,x_n \tag{7.2}$$

Λ é a matriz das correlações, de elementos λ_{ik} dados por

$$\lambda_{ik} = E\,(x_i-m_i)\,(x_k-m_k) \tag{7.3}$$

e γ_{nk} são os elementos da matriz inversa de Λ, $\Gamma = \Lambda^{-1}$.

Embora neste trabalho nos restrinjamos aos *processos estacionários de média nula*, a análise que se segue é válida no caso geral.

Vamos mostrar que a correlação de 3.ª ordem é nula nestes processos.

Para isso (ver Apêndice), basta fazer uma mudança de variáveis, através da transformação linear

$$y'_i = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\ y_k \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots N \tag{7.4}$$

em que fizemos

$$y_k = x_k - m_k \tag{7.5}$$

Esta transformação, por ser linear, mantém o carácter multinormal das novas variáveis. (Ver A 19).

Se designarmos por A a matriz, de elementos a_{ik}, da transformação (7.4), a nova matriz das correlações das variáveis y'_i é dada por

$$\Lambda' = A\,\Lambda\,A^T \tag{7.6, A7}$$

(1) O det Λ é sempre positivo (ver (A 28), Apêndice).

É possível diagonalizar esta matriz através duma escolha apropriada de A, obtendo-se para as novas variáveis y'_i a distribuição

$$p(y'_1, y'_2, \dots y'_N) = \prod_{i=1}^{N} p(y'_i) \tag{7.7, A 25}$$

em que

$$p(y'_i) = \frac{1}{(2\pi\lambda_i)^{1/2}} \exp\left(-y'^2_i/2\lambda_i\right) \tag{7.8, A26}$$

sendo λ_i os elementos da matriz diagonal Λ', dados por $\lambda_i = E\, y'^2_i$

As novas variáveis y'_i são portanto independentes, o que nos vai permitir calcular facilmente $E\, y_1 y_2 y_3$ e verificar que a função de correlação de 3.ª ordem dum processo gaussiano, mesmo não estacionário, é identicamente nula.

Com efeito, considerando 3 instantes quaisquer t_1, t_2, t_3 e designando, como já o fizemos, as variáveis $x(t_1) - E\,x(t_1)$, $x(t_2) - E\,x(t_2)$ e $x(t_3) - E\,x(t_3)$ por y_1, y_2, y_3, é possível obter por uma transformação conveniente, de acordo com o que ficou exposto, 3 novas variáveis y'_1, y'_2, y'_3, obedecendo a (7.7, 7.8), com $N = 3$.

A correlação de 3.ª ordem procurada será dada por

$$\psi(t_1, t_2, t_3) = E\, y_1\, y_2\, y_3 = \iiint_{-\infty}^{\infty} y_1\, y_2\, y_3\, p(y_1, y_2, y_3)\, dy_1\, dy_2\, dy_3 \tag{7.9}$$

Dado que os y_k também se exprimem nos y'_i através duma transformação linear (expressa pela matriz inversa de A, $A^{-1} = A^T$, ver Apêndice) o produto $y_1 y_2 y_3$ é constituído por parcelas que, à parte coeficientes constantes, são de forma y'^3_i, $y'^2_i\, y_k$ $(i \neq k)$ e $y'_1\, y'_2\, y'_3$. Todas estas parcelas vão ter contribuição nula para o cálculo de $E\, y_1 y_2 y_3$.

Com efeito, em virtude de (7.7) tem-se, por exemplo

$$E\, y'^3_1 = \iiint_{-\infty}^{\infty} y'^3_1\, p(y'_1)\, p(y'_2)\, p(y'_3)\, dy'_1\, dy'_2\, dy'_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y'^3_1\, p(y'_1)\, dy'_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(y'_2)\, dy'_2 \int_{-\infty}^{\infty} p(y'_3)\, dy'_3 = 0 \tag{7.10}$$

por ser nulo o 1.º integral (integranda ímpar).

Da mesma forma

$$E\, y'^2_1\, y'_3 = \int_{-\infty}^{\infty} y'^2_1\, p(y'_1)\, dy'_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(y'_2)\, dy'_2 \int_{-\infty}^{\infty} y'_3\, p(y'_3)\, dy'_3 = 0 \tag{7.11}$$

por ser agora o 3.º integral que se anula.

Finalmente

$$E\, y'_1\, y'_2\, y'_3 = \prod_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} y'_i\, p(y'_i)\, dy'_i = 0 \tag{7.12}$$

por serem os três factores nulos.

Está assim provado, como pretendíamos, que a correlação ou momento central de 3.ª ordem dum processo gaussiano, *não necessariamente estacionário,* é nula.

Este mesmo raciocínio aplicado a ordens superiores à 3.ª mostra que todos os momentos centrais de ordem ímpar são igualmente nulos. Acima da 3.ª ordem as correlações diferem dos moments centrais, sendo definidas doutro modo. Pode provar-se que todas as correlações a partir da 3.ª ordem são nulas para o processo gaussiano. (Este anulamento das correlações é aliás uma forma axiomática de definir o processo gaussiano, utilizando a função característica) (1).

Só para a caso estacionário se pode fazer a descrição dos processos em termos da frequência. É neste contexto que se define o bispectro, como se viu (§ 4.). Podemos pois concluir que o bispectro dos processos gaussianos *estacionários* é nulo.

O interesse da análise de 3.ª ordem, nomeadamente da análise espectral, hoje mais exequível por via computacional do que a análise de correlação (dada a existência de algoritmos muito rápidos de análise de Fourier como a FFT — Fast Fourier Transform) reside precisamente na sensibilidade daquelas grandezas de 3.ª ordem relativamente ao processo gaussiano, para o qual se anulam.

Isto permite avançar em 2 tipos de problemas:

1) Detectar a presença dum processo não gaussiano num fenómeno qualquer em estudo (2).
2) Detectar a natureza não linear dum fenómeno, admitindo que as suas causas possam satisfazer uma lei normal.

Este 2.º tipo de problemas é o que aparece com mais frequência, principalmente em Geofísica (3).

8. O ESPECTRO DE POTÊNCIA E O BISPECTRO COMO RESULTADOS DE FILTRAGENS

Vejamos como se pode interpretar o espectro de potência e o bispectro dum processo estacionário em termos de filtragens lineares de banda estreita.

Suponhamos então que fazemos passar o sinal x(t) por dois sistemas lineares invariantes constituindo filtros passa-banda muito estreitos, centrados nas frequências ω_a e ω_b. Vamos admitir que estes filtros são ideais, de largura Δ, definidos por

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= e^{j\theta_a} && \omega \in [\omega_a - \Delta/2\,,\ \omega_a + \Delta/2] \\ &= e^{-j\theta_a} && \omega \in [-\omega_a - \Delta/2\,,\ -\omega_a + \Delta/2] \\ &= 0 && \text{fora destes intervalos} \\ \text{com } \theta_a & \text{ constante} \end{aligned} \tag{8.1}$$

$H_2(\omega)$ supõe-se análgo a $H_1(\omega)$, substituindo ω_a por ω_b e θ_a por θ_b.

Estes filtros, embora reais (8.1), não são evidentemente realizáveis fisicamente, apenas se podendo realizar matematicamente. (Fig. 8.1).

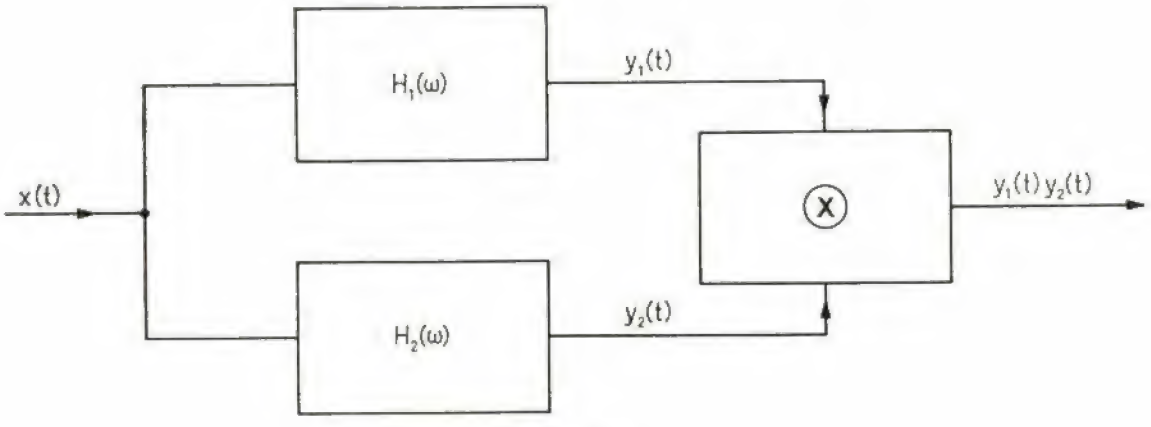


Fig. 8.1

(1) Ver **Stratonovich**, 1963, Cap. 3.
(2) Ver **Rebelo Simões**, 1971.
(3) Ver **Hasselman** et al, 1963; **Mac Donald**, 1965; **Madden**, 1964; **Haubrich**, 1965.

Calculemos agora o valor médio do produto $y_1(t)\,y_2(t)$ das saídas destes filtros, admitindo que os intervalos definidos em (8.1) correspondentes aos dois filtros não são respectivamente disjuntos (Fig. 8.2)

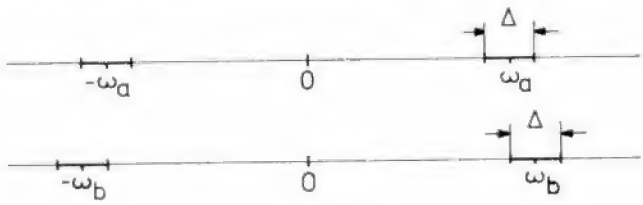


Fig. 8.2

Podemos exprimir $E\,y_1(t)\,y_2(t)$ em função do espectro de potência cruzado $\Phi_{y_1y_2}(\omega)$, e este, por sua vez, no espectro de potência de entrada $\Phi_x(\omega)$.

Com efeito, atendendo às relações (5.4), (6.7), (6.8), tem-se

$$E\,y_1(t)\,y_2(t)^{(1)} = \varphi_{y_1y_2}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{y_1y_2}(\omega)\;d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega)\,H_1(-\omega)\,H_2(\omega)\;d\omega \tag{8.2}$$

Pelo teorema da média, poderemos escrever, supondo $\omega_b \geqslant \omega_a$

$$E\,y_1(t)\,y_2(t) = \frac{1}{2\pi}\,\Phi_x(\omega_c)\,.\,2\,\mathrm{Re}\left[\int_{\omega_b-\Delta/2}^{\omega_a+\Delta/2} H_1(-\omega)\,H_2(\omega)\;d\omega\right] \tag{8.3}$$

em que ω_c é um valor do intervalo da integranda.

Calculando este integral, obtém-se

$$E\,y_1(t)\,y_2(t) = \frac{\omega_a-\omega_b+\Delta}{\pi}\cos(\theta_a-\theta_b)\,\Phi_x(\omega_c) \tag{8.4}$$

Suponhamos que o espectro em estudo $\Phi_x(\omega)$ varia muito pouco no intervalo Δ.

Se fizermos agora varia ω_b e θ_b, admitindo ω_a e θ_a fixos, a expressão anterior é máxima para $\omega_b = \omega_a$, $\theta_b = \theta_a$, vindo

$$E\,y_1(t)\,y_2(t) \simeq \frac{\Delta}{\pi}\,\Phi_x(\omega_a) \tag{8.5}$$

Nestas condições os filtros são iguais e $y_1(t) \equiv y_2(t)$, pelo que a operação é na realidade a determinação do valor quadrático médio de um sinal filtrado por um único filtro, centrado em $\omega = \omega_a$, de largura Δ e de fase θ_a constante na banda, tendo-se como resultado que (8.5) se pode escrever

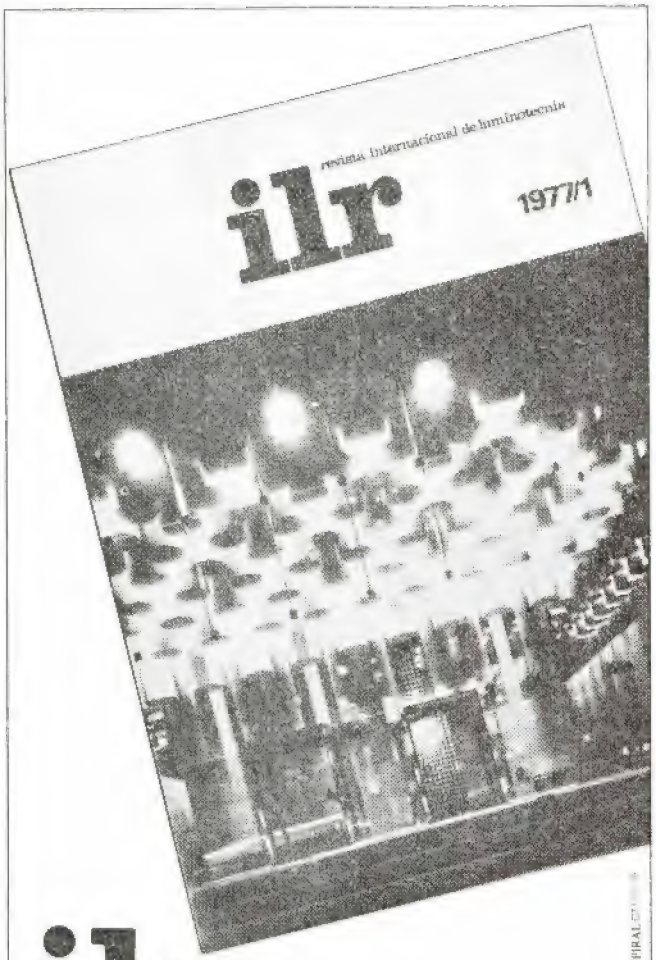
$$E\,y^2(t) \simeq \frac{\Delta}{\pi}\,\Phi_x(\omega_a)$$

ou seja

$$\Phi_x(\omega_a) \simeq \frac{\pi}{\Delta}\,E\,y^2(t) \tag{8.6}$$

(1) $E\,y_1(t) = E\,y_2(t) = 0$, mesmo que $Ex(t) \neq 0$, por se ter $H_1(o) = H_2(o) = 0$ (cf. 6.2).

tectos
divisórias
pavimentos
G.T.R. PARA CRIAR NOVOS AMBIENTES
Um novo espaço à sua medida, rapidamente, a seu gosto, de acordo com as suas necessidades.
G.T.R. é material modulado de alta qualidade técnica.
Pavimentos para computadores, tectos falsos e divisórias patenteadas Cloisall.
G.T.R. a resposta exacta aos seus problemas de espaço.
G.T.R. é decoração, acabamento perfeito, longa vida, versatilidade, rapidez de montagem.
G.T.R. – Gabinete Técnico de Revestimentos garante a produção e entrega dos seus materiais.
Somos G.T.R. – Gabinete Técnico de Revestimentos, Lda.
Consulte-nos. Estamos na Rua Rodrigo da Fonseca, 52-1.º E.
Lisboa 1 – telef. 535217 · 561088 · 575466
G.T.R. – Um novo espaço à sua medida!
CLOISALL
gabinete tecnico de revestimentos, lda.



ESPIRAL

ilr

revista internacional de luminotecnia

Publicação trimestral, a côres, com informação sobre os mais importantes domínios de aplicação em iluminação interior, exterior, instalações especiais, fotometria, etc. Grande variedade de temas e artigos por autores de grande prestigio editada por "Stichting Prometheus" — Amsterdão. Recomendada pela Philips a arquitectos, engenheiros, decoradores, estudantes, firmas instaladoras, empresas comerciais e industriais, estabelecimentos de ensino, Museus, Servicos Municipalizados, Federações de Municípios, gabinetes de apoio técnico, estaleiros, gabinetes de estudos e projectos, construções hospitalares, organizações desportivas, gabinetes do planeamento de vias públicas, auto-estradas, pontes e túneis, empreendimentos turísticos, bibliotecas, etc.

32 páginas a cores
4 publicações por ano

Assinatura anual 240$00
acrescido de portes de correio

Pedidos de assinatura a:

PHILIPS PORTUGUESA, SARL

Departamento de Iluminação
Av. Eng.º Duarte Pacheco, 6
LISBOA 1

HIDRÁULICA GERAL

1.º VOLUME

— FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Pelo Engenheiro

Alberto Abecasis Manzanares

A SAIR BREVEMENTE

Se suposermos que o processo em estudo é ergódico, o valor médio de conjunto referido pode ser substituído por uma média temporal, tomada ao longo dum tempo infinito, ou seja

$$\Phi_x(\omega_a) \simeq \frac{\pi}{\Delta} \overline{y^2(t)} \tag{8.7}$$

Na prática podemos substituir estes métodos puramente matemáticos por métodos físicos, para o que basta substituir os filtros ideais apresentados por *aproximações realizáveis* em que

$$\begin{aligned} H(\omega) &\simeq e^{j\theta(\omega)} && \text{nos intervalos referidos} \\ &\simeq 0 && \text{fora desses intervalos} \end{aligned} \tag{8.8}$$

tendo-se, como anteriormente $H(-\omega) = H^*(\omega)$ para assegurar o carácter real de $h(t)$ e a fase $\theta(\omega)$ variando adequadamente com ω para assegurar a realizabilidade física.

Nestas condições, e pondo $\omega_b = \omega_a$, $\theta_b(\omega) = \theta_a(\omega)$, obtém-se igualmente a expressão (8.7).

É este o princípio de funcionamento dos analisadores analógicos de espectro de potência.

Deve notar-se que além do erro introduzido pela inexactidão do filtro empregado em relação ao ideal, temos o erro mais importante resultante da duração limitada do intervalo de avaliação da média.

Esta limitação é mais acentuada nos métodos analógicos que operam em cada instante sobre um certo passado, do que nos métodos digitais, utilizando sistemas fisicamente irrealizáveis como o descrito inicialmente, já que nestes métodos se opera em cada instante sobre *todo o registo*. Mesmo assim, o erro é ainda razoável, podendo ser substancialmente diminuído com o emprego de métodos de estimação estatística, que referiremos mais adiante a título de informação.

Vamos agora ver como se pode estender à 3.ª ordem a *interpretação* do espectro em termos de filtragens de banda estreita análogas às anteriores, mas utilizando três sistemas.

Para isso consideremos três filtros ideais definidos como em (8.1) mas centrados respectivamente nas frequências ω_c, ω_a, ω_b, e de fases θ_c, θ_a, θ_b. (Fig. 8.3).

Assim, e nos intervalos correspondentes, de largura Δ, será

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= e^{j\theta_c} \\ H_2(\omega) &= e^{j\theta_a} \\ H_3(\omega) &= e^{j\theta_b} \end{aligned} \tag{8.9}$$

anulando-se $H_i(\omega)$ fora desses intervalos, e tendo-se $H_i(-\omega) = H_i^*(\omega)$

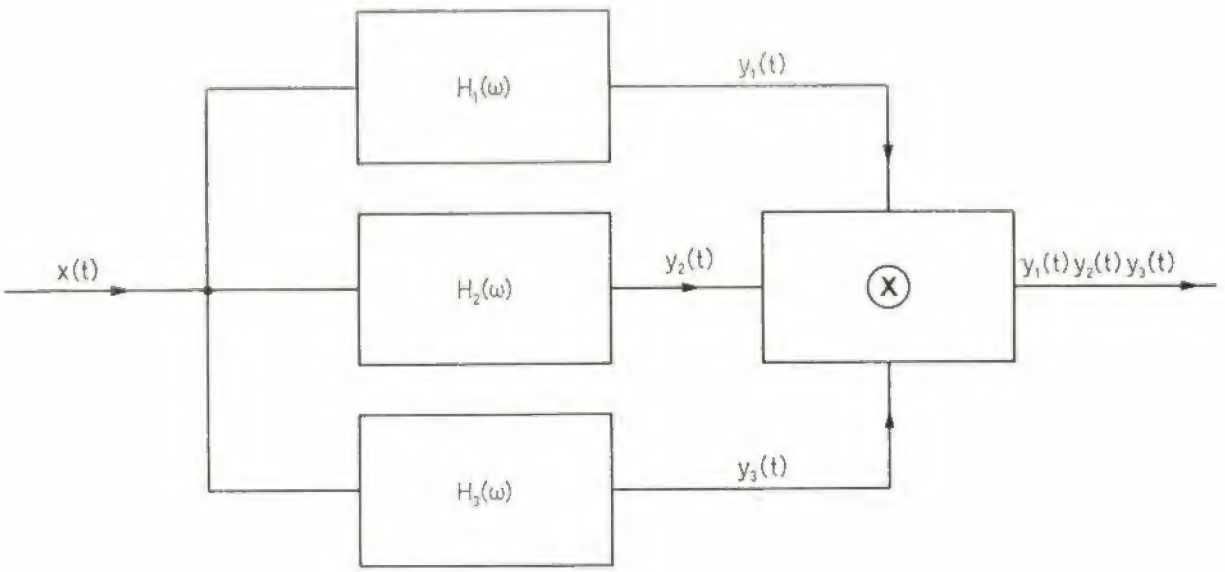


Fig. 8.3

Calculemos agora o valor médio do produto $y_1(t)\, y_2(t)\, y_3(t)$ das saídas destes filtros.

Podemos exprimir este valor em função do bispectro cruzado $\Psi_{y_1 y_2 y_3}(\omega_1, \omega_2)$, e este por seu turno no bispectro da entrada $\Psi_x(\omega_1, \omega_2)$.

Com efeito, atendendo às relações (5.12), (6.12), (6.13), tem-se [1]

$$E\, y_1(t)\, y_2(t)\, y_3(t) = \psi_{y_1 y_2 y_3}(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_{y_1 y_2 y_3}(\omega_1, \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(\omega_1, \omega_2)\, H_1(-\omega_1 - \omega_2)\, H_2(\omega_1)\, H_3(\omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2 \qquad (8.10)$$

Devido às condições (8.9) o produto $H_2(\omega_1)\, H_3(\omega_2)$ vai delimitar o domínio de integração aos 4 quadrados figurados (Fig. 8.4), em que se supôs, sem perda de generalidade, $\omega_a > \omega_b > 0$

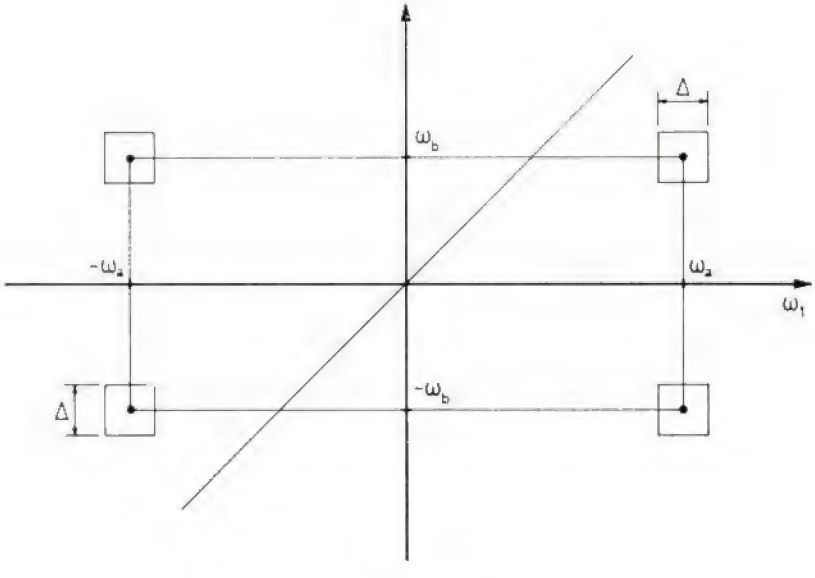


Fig. 8.4

Por outro lado, e admitindo ω_a e ω_b fixos e ω_c variável, o factor $H_1(-\omega_1 - \omega_2)$ só não se anulará se as faixas

$$\begin{aligned} \omega_c - \Delta/2 < \omega_1 + \omega_2 < \omega_c + \Delta/2 \\ -\omega_c - \Delta/2 < \omega_1 + \omega_2 < -\omega_c + \Delta/2 \end{aligned} \qquad (8.11)$$

intercectarem os quadrados centrados em (ω_a, ω_b) e $(-\omega_a, -\omega_b)$ — caso em que ω_c está na vizinhança de $\omega_a + \omega_b$ ou os quadrados centrados em $(\omega_a, -\omega_b)$ e $(-\omega_a, \omega_b)$ — caso em que ω_c está na vizinhança de $\omega_a - \omega_b$.

---

[1] Também aqui se tem $Ey_1(t) = Ey_2(t) = Ey_3(t) = 0$, mesmo para $Ex(t) \neq 0$, por se ter $H_1(o) = H_2(o) = H_3(o) = 0$

Consideremos então a situação representada (Fig. 8.5), que corresponde a $\omega_c \simeq \omega_a + \omega_b$

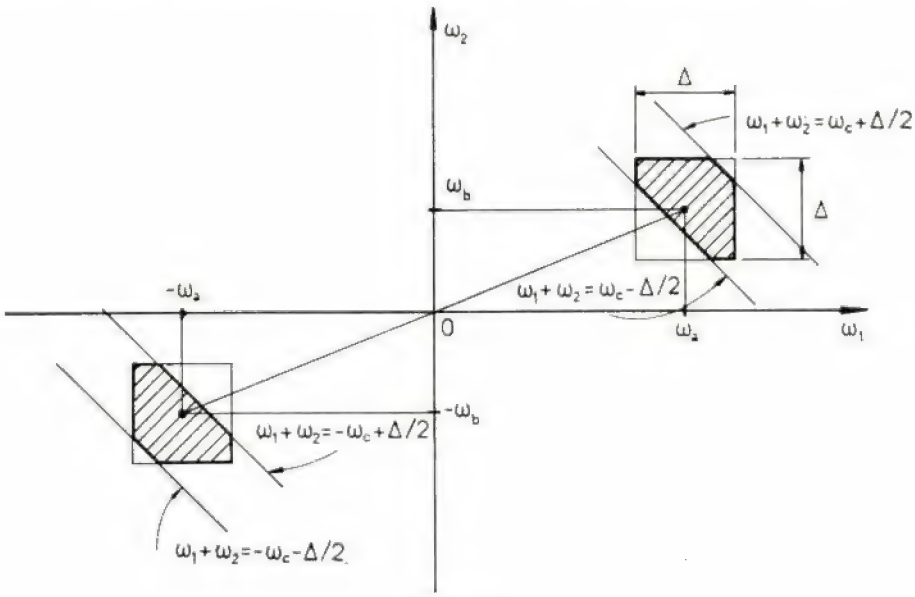


Fig. 8.5

Se suposermos que Δ é suficientemente pequeno para que o bispectro varie muito pouco na região de integração R (zonas tracejadas), o integral (8.10) pode escrever-se

$$E\ y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t) \simeq \frac{1}{(2\pi)^2} \Psi_x(\omega_a, \omega_b) \iint_R H_1(-\omega_1 - \omega_2)\ H_2(\omega_1)\ H_3(\omega_2)\ d\omega_1\ d\omega_2 \tag{8.12}$$

Substituindo $H_i(\omega)$ pelas suas expressões obtém-se

$$E\ y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t) \simeq \frac{1}{(2\pi)^2} A\,.\,2\ \mathrm{Re}\left\{ \Psi_x(\omega_a, \omega_b)\ e^{j(\theta_a+\theta_b-\theta_c)} \right\} \tag{8.13}$$

em que A é a área de qualquer dos hexágonos de R, dada por

$$A = \frac{3\,\Delta^2}{4} - (\omega_a + \omega_b - \omega_c)^2 \tag{8.14}$$

Esta área é máxima para $\omega_c = \omega_a + \omega_b$, atingindo então o valor $3\,\Delta^2/4$. Nestas condições, teremos

$$E\ y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t) \simeq \frac{3\Delta^2}{8\pi^2}\ \mathrm{Re}\left\{ \Psi_x(\omega_a, \omega_b)\ e^{j(\theta_a+\theta_b-\theta_c)} \right\} \tag{8.15}$$

expressão que nos vai permitir calcular $\Psi_x(\omega_a, \omega_b)$.

Com efeito, se fizermos

$$\theta_a+\theta_b-\theta_c = 0 \pmod{2\pi} \tag{8.16}$$

resulta

$$E\ y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t) \simeq \frac{3\Delta^2}{8\pi^2}\ \mathrm{Re}\left\{ \Psi_x(\omega_a, \omega_b) \right\} \tag{8.17}$$

Se em vez disso fizermos

$$\theta_a + \theta_b - \theta_c = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \tag{8.18}$$

vem

$$E\ y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t) \simeq \frac{3\Delta^2}{8\pi^2}\ \mathrm{Im}\left\{ \Psi_x(\omega_a, \omega_b) \right\} \tag{8.19}$$

Conclui-se assim que a parte real e a parte imaginária do bispectro do sinal x(t), nas frequências (ω_a, ω_b) são dadas aproximadamente, à parte o factor $3\Delta^2/8\pi^2$, pelos valores médios (que podem ser temporais, para os processos ergódicos) dos produtos dos sinais obtidos por filtragem estreita (ideal) de x(t) nas frequências (ω_a, ω_b e $\omega_a + \omega_b$, e em que as fases (constantes) dos filtros obedeçam respectivamente às condições (8.16) e (8.18). (Por exemplo $\theta_a = \theta_b = \theta_c = 0$, para a parte real, e $\theta_a = \theta_b = 0$, $\theta_c = \pi/2$, para a parte imaginária).

Estas filtragens, análogas às estudadas para o espectro de potência pressupõem portanto filtros fisicamente irrealizáveis e como tal só são possíveis por via matemática, utilizando o computador.

Notemos que a utilização de filtros realizáveis para a obtenção aproximada do bispectro por meios analógicos não se faz com a mesma facilidade com que se efectua para o espectro de potência. Por isso se preferem métodos aritméticos.

9. COMPUTAÇÃO DO ESPECTRO DE POTÊNCIA E DO BISPECTRO

Limitar-nos-emos a apresentar alguns tópicos dos métodos usados (1).

Na prática, os métodos de filtragem numérica indicados no parágrafo anterior não são os mais indicados. Até 1965 eram os únicos utilizados para o bispectro (2). No que respeita o espectro de potência, porém, já antes disso se preferiam processos baseados em métodos estatísticos que partiam da estimação prévia da correlação, e que procuravam minimizar a variância das determinações (3).

A partir de 1965, com a aparecimento do algoritmo — FFT — Fast Fourier Transform (4), foi possível reduzir drasticamente o tempo de cálculo e realizar estimativas baseadas no cálculo do periodograma, dado por

$$\Phi_T(\omega) = \frac{1}{T} \left| X(\omega) \right|^2 \tag{9.1}$$

em que

$$X(\omega) = \Delta \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta)\, e^{-jp\omega\Delta} \tag{9.2}$$

sendo x(t) uma amostra de duração $T = N\Delta$. A utilização apenas dos valores de x(t) intervalados de Δ implica a suposição de um espectro de banda limitada a $|\omega| = \pi/\Delta$ (teorema da amostragem).

Este periodograma é depois ponderado por uma função $J_T(\omega)$ devidamente escolhida, denominada «janela» na linguagem da análise espectral, resultando finalmente para estimador do espectro de potência a expressão

$$\hat{\Phi}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{s=0}^{N-1} J_T\left(\omega - \frac{2\pi s}{T}\right) \Phi_T\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \tag{9.3}$$

tendo-se ainda

$$\operatorname{var} \hat{\Phi}(\omega) \simeq \frac{\Phi^2(\omega)}{2\pi T} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} J_T^2(\lambda)\, d\lambda \tag{9.4}$$

para espectros $\Phi(\omega)$ variando lentamente dentro da largura da janela (5) ou seja, dentro da banda em que esta toma valores mais apreciáveis.

Dado que $J_T(\omega)$, além de ser par, apenas tem de obedecer à condição

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} J_T(\omega)\, d\omega = 1 \tag{9.5}$$

---

(1) Ver por exemplo, para o espectro, **Jenkins & Watts**, 1968; **Brillinger**, 1975; e para o bispectro, **Brillinger & Rosenblatt**, 1967.

(2) Ver **Hasselman** et al. 1963; **MacDonald**, 1965.

(3) **Jenkins & Watts**, 1968; **Vários Autores**, *Technometrics*, 3, 1961.

(4) Para um estudo pormenorizado deste método, aconselha-se a ler **Brigham**, 1974. Quanto ao uso do periodograma já era conhecido antes de 1965, sendo equivalente ao uso da correlação. Era porém mais lento que aquele, até à descoberta da FFT que lhe permitiu passar a ser o método mais rápido.

(5) A definição exacta de largura depende dos autores, mas anda à volta do conceito de concentração indicado.

a variância de $\Phi(\omega)$ pode reduzir-se arbitrariamente à custa do aumento da duração T (o que não acontece, prova-se, para o periodograma, que é uma estimativa não ponderada de $\Phi(\omega)$. Para T fixo, apenas se pode baixar a var $\Phi(\omega)$ à custa do aumento da duracão de $J_T(\omega)$ (1), o que vai prejudicar a *resolução* das estimativas, distanciando as frequências para as quais elas são independentes.

A redução do tempo de cálculo da expressão $X(\omega)$, através da FFT é espectacular, pois é da ordem de $(1/N)\log_2 N$ (por exemplo para $N \simeq 1000$, a redução é da ordem de 1/100).

Esta circunstância permitiu estender para o bispectro os métodos acima apresentados, com as adaptações necessárias.

Assim, começa-se por calcular o *periodograma de 3.ª ordem*

$$\Psi_T(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{T} X(\omega_1) X(\omega_2) X(-\omega_1 - \omega_2) \tag{9.6}$$

e daí, através das *janelas bispectrais* $J_T(\omega_1, \omega_2)$, obedecendo à condição

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} J_T(\omega_1, \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2 = 1 \tag{9.7}$$

obtém-se para estimador do bispectro a expressão

$$\hat{\Psi}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{T^2} \sum_{s_1=0}^{N-1} \sum_{s_2=0}^{N-1} J_T\left(\omega - \frac{2\pi s_1}{T}, \omega_2 - \frac{2\pi s_2}{T}\right) \Psi_T\left(\frac{2\pi s_1}{T}, \frac{2\pi s_2}{T}\right) \tag{9.8}$$

tendo-se ainda

$$\text{var}\, \hat{\Psi}(\omega_1, \omega_2) \simeq \frac{1}{(2\pi)^2 T} \Phi(\omega_1)\, \Phi(\omega_2)\, \Phi(\omega_1 + \omega_2) \iint_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} J_T^2(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu \tag{9.9}$$

para espectros variando lentamente dentro da largura (em cada dimensão) da janela.

As considerações feitas para o espectro de potência a propósito do compromisso entre variância e resolução das estimativas põem-se também para o bispectro. Pode provar-se que, em igualdade de resolução, o que se traduz por igual ordem de grandeza entre a largura (em cada dimensão) de $J_T(\omega_1, \omega_2)$ e a largura de $J_T(\omega)$, e para uma série $x(p\Delta)$ *normada*, isto é, com variância unitária (2), se tem aproximadamente, para o ruído branco ($\Phi(\omega)$ constante)

$$\frac{\text{var}\, \hat{\Psi}(\omega_1, \omega_2)}{\text{var}\, \hat{\Phi}(\omega)} \simeq 2\,M \tag{9.10}$$

em que M é o número de bandas independentes (em cada dimensão), ou seja, o cociente entre a banda do processo (π/Δ) e a largura da janela.

Assim, por exemplo, se considerarmos um processo limitado a 1000 Hz tem-se como ordem de grandeza var $\hat{\Psi}$/var $\hat{\Phi} \simeq 16$, isto é, as flutuações das estimativas do bispectro são aproximadamente 4 vezes mais elevadas que as do espectro de potência. Quanto maior for o número de bandas, maior será este agravamento das variações das estimativas do bispectro em relação às do espectro de potência.

Esta maior instabilidade resulta da existência de 3 factores aleatórios $X(\omega_k)$ em vez dos 2 usados para o espectro de potência, e constitui uma séria limitação das aplicações do bispectro, pois a redução da

(1) A forma da função $J_T(\omega)$ também influi na variância. Para as janelas mais usuais, como as de Tukey, Parzen, Papoulis, a diferença não é porém grande.

(2) A normação consegue-se substituindo a sucessão $x_p = x(p\Delta)$ por $x_p / \sqrt{\overline{x_p^2}}$, sendo $\overline{x_p^2}$ o valor quadrático médio calculado da amostra. Os valores x_p supõem-se além disso préviamente deduzidos do seu valor médio, de modo a ter-se $\overline{x_p} = 0$.

variância exigirá um número muito elevado de dados. Este facto vai onerar o cálculo, pois muito embora a computação dos factores $X(\omega)$ seja extremamente facilitada pela FFT, a efectivação das médias ponderadas a 2 dimensões vai implicar um número de multiplicações que é sensivelmente da ordem de N^2, ao passo que para o espectro de potência aquele número é da ordem de N.

Esta limitação não é, no entanto, o maior obstáculo, dada a crescente velocidade de cálculo dos computadores digitais. A maior limitação ao uso do bispectro reside na própria dificuldade em obter nos casos práticos um número suficientemente elevado de dados, em virtude da natureza limitada dos registos usualmente disponíveis.

Não queremos terminar este artigo com uma nota pessimista. Na realidade há que ter em conta a grande sensibilidade do bispectro na detecção dum processo não gaussiano.

Para o ilustrar vamos apresentar dois exemplos, através de gráficos obtidos na determinação do bispectro de processos simulados em computador.

O primeiro (1) refere-se a uma situação em que estão presentes um processo gaussiano (ruído) e um processo constituído por uma sobreposição de impulsos de amplitude aleatória, ocorrendo também aleatoriamente no tempo segundo uma lei de Poisson (sinal). Apresentam-se duas determinações correspondentes aos casos *só ruído* e *ruído + sinal*, com a relação $S/N = 20\ \%$. Conclui-se que, apesar de o ruído ser 5 vezes maior que o sinal (em potência), é visível a presença deste através do bispectro (Figs. 9.1 e 9.2).

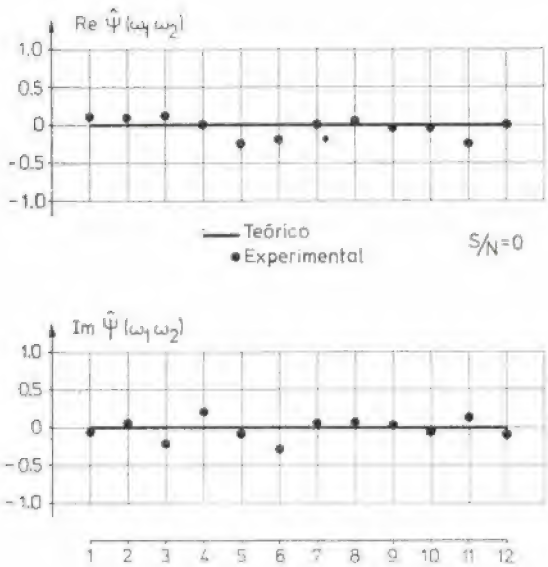


Fig. 9.1

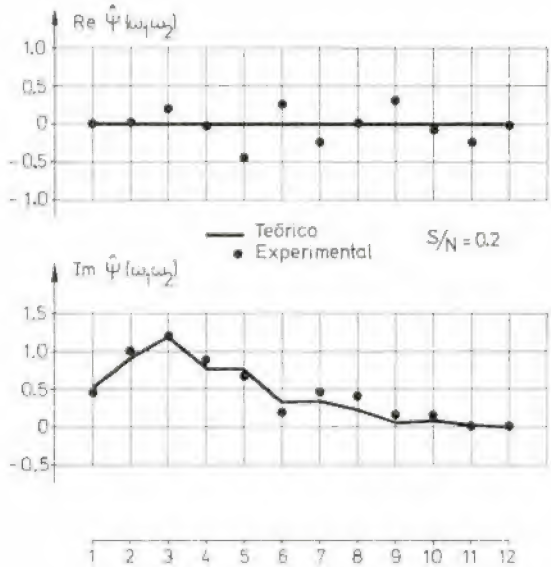


Fig. 9.2

O segundo (2) refere-se a uma situação em que está presente um processo não gaussiano resultante da passagem de ruído-branco gaussiano estacionário por um sistema com uma não-linearidade de 2.ª ordem, dado por $y = x + \alpha x^2$. O sinal de saída $y(t)$ é normado de forma a ter-se $\overline{y} = 0$ e $\overline{y^2} = 1$. Devido a problemas de amostragem resulta um fenómeno de sobreposição de bispectros que conduz a um valor teórico constante (2). Comparem-se (Figs. 9.3, 9.4) os casos $\alpha = 0$ (caso linear) e $\alpha = 0{,}1$. A pesar da pequenez da não-linearidade, esta torna-se também perfeitamente visível através do bispectro.

(1) Ver **Rebelo Simões**, 1971.
(2) Ver **Rebelo Simões**, 1972 e **Rebelo Simões & Miranda Mourão**, 1972.

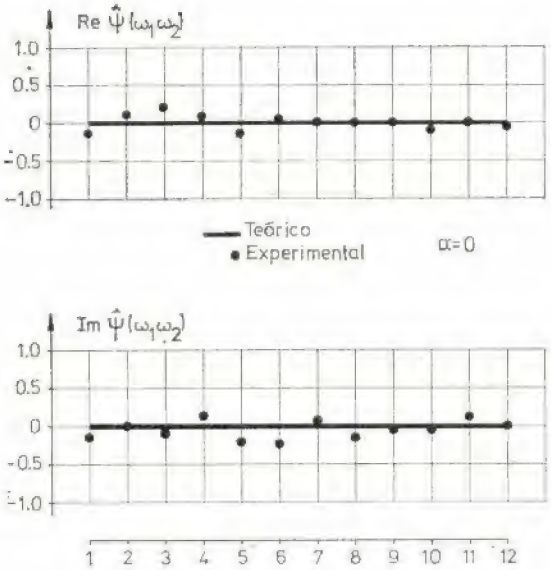


Fig. 9.3

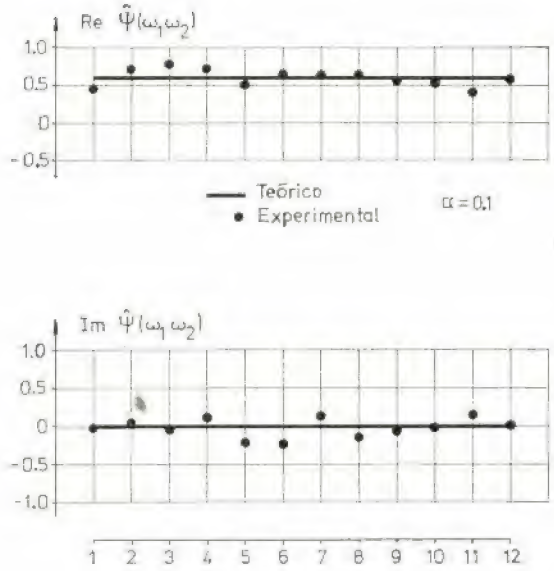


Fig. 9.4

Em qualquer dos casos os pontos calculados correspondem ao sector representado na Fig. 9.5, com $\omega_1 = \frac{N_1\pi}{M\Delta}$, $\omega_2 = \frac{N_2\pi}{M\Delta}$. tendo-se feito $M = 8$.

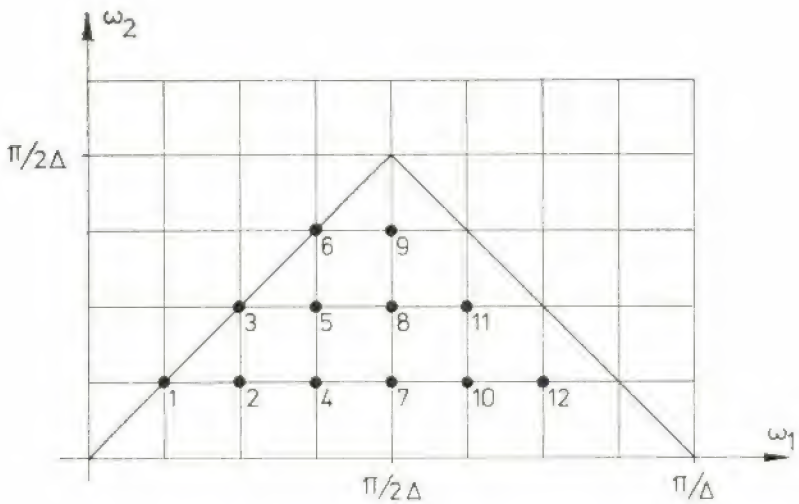


Fig. 9.5

Os pontos foram ordenados arbitrariamente da forma indicada na figura e, para efeitos de representação do bispectro, colocados como abcissas a intervalos iguais.

Em conclusão, fica patente através destes exemplos a forma notável como o afastamento da distribuição dum processo em relação à gaussiana transparece na determinação do bispectro, mau grado as flutuações das estimativas.

APÊNDICE

TRANSFORMAÇÃO LINEAR DUMA DISTRIBUIÇÃO MULTINORMAL

Consideremos as variáveis $\{x_1, x_2, \dots x_N\}$ obedecendo a uma distribuição conjunta gaussiana ou multinormal

$$p(x_1, x_2, \dots x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det \Lambda)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \gamma_{nk}(x_n - m_n)(x_k - m_k)\right] \qquad \text{(A 1)} \equiv (7.1)$$

Vamos usar, para facilitar a análise, a notação matricial

Assim, seja X a matriz coluna das variáveis x_n, M a das médias m_n, e façamos

$$Y = X - M \qquad \text{(A 2)}$$

o que equivale a definir as novas variáveis $y_n = x_n - m_n$, de média nula.

A expressão (A 1) da distribuição multinormal tomará a forma abreviada (1)

$$p(X) = p(Y)^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det \Lambda)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} Y^T \Gamma Y\right] \qquad \text{(A 3)}$$

Por outro lado a expressão (7.3) $\lambda_{ik} = E(x_i - m_i)(x_k - m_k)$ pode escrever-se

$$\Lambda = E Y Y^T \qquad \text{(A 4)}$$

Consideremos agora uma transformação linear das variáveis y_n definida por uma matriz quadrada A de ordem N

$$Y' = AY \qquad \text{(A 5)}$$

equivalente a

$$y'_i = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\, y_k \qquad i = 1, 2, \dots N \qquad \text{(cf 7,4)}$$

Ter-se-á então (3)

$$EY' = AEY = 0 \qquad \text{(A 6)}$$

pelo que as correlações de 2.ª ordem das variáveis que definem Y coincidem com os momentos, constituindo a matriz Λ' dada por

$$\Lambda' = EY'Y'^T = EAY(AY)^T = A\Lambda A^T \qquad \text{(A 7)}$$

em virtude de (A 4 e A 5).

Esta relação mostra como se obtêm as correlações das novas variáveis y'_n em função das correlações das antigas y_n.

Resta determinar a distribuição das novas variáveis y'_n.

Para isso basta exprimir o argumento da exponencial em (A 3) nas novas variáveis, e atender à identidade

$$p(y'_1, y'_2, \dots y'_N)\, dy'_1\, dy'_2 \dots dy'_N = p(y_1, y_2, \dots y_N)\, dy_1\, dy_2 \dots dy_N^{(4)} \qquad \text{(A 8)}$$

pelo que se tem, como se sabe do cálculo,

$$p(y'_1, y'_2, \dots y'_N) = p(y_1, y_2, \dots y_N) \left| \frac{\partial(y_1, y_2, \dots y_N)}{\partial(y'_1, y'_2, \dots y'_N)} \right| \qquad \text{(A 9)}$$

---

(1) A^T = matriz transposta de A

(2) Seria mais correcto escrever $p_x(x) = p_y(y)$, com $Y = X - M$, mas omitimos, para facilitar a notação, os índices, que se subentendem.

(3) O zero representa aqui a matriz coluna constituída por zeros.

(4) A transformação linear (A 5) implica uma solução única $Y = A^{-1} Y'$ para o sistema de equações correspondente, pelo que (A 8) só tem um termo.

em que $\partial (y_1, y_2 \dots y_N) / \partial (y'_1, y'_2 \dots y'_N)$ é o Jacobiano da transformação (A 5), dado pelo determinante da matriz J, de elementos

$$j_{ik} = \frac{\partial y_k}{\partial y'} \tag{A 10}$$

Ora de (A 5) tira-se

$$Y = A^{-1} Y' \tag{A 11}$$

se a matriz A não for singular

Da transformação linear (A 11) obtém-se

$$\frac{\partial y_k}{\partial y'_i} = a'_{ki} \tag{A 12}$$

em que a'_{ki} são os elementos da matriz A^{-1}.

Daqui se conclui que

$$J^T = A^{-1} \tag{A 13}$$

donde

$$\det J = (\det A)^{-1} \tag{A 14}$$

pelo que (A 9) se pode escrever, abreviadamente

$$p(Y') = p(Y) / |\det A| \tag{A 15}$$

Calculando agora o produto $Y \Gamma Y^T$, argumento da exponencial (A 3), vem

$$Y^T \Gamma Y = (A^{-1} Y')^T \Lambda^{-1} A^{-1} Y' = Y'^T (A^{-1\,T} \Lambda^{-1} A^{-1}) Y' = Y'^T (A \Lambda A^T)^{-1} Y' = Y'^T \Gamma' Y' \tag{A 16}$$

em que

$$\Gamma' = (\Lambda')^{-1} \tag{A 17}$$

Por outro lado, de (A 7) tira-se

$$\det \Lambda' = \det \Lambda \, (\det A)^2 \tag{A 18}$$

donde finalmente, atendendo a (A 3), (A 15), (A 18), vem

$$p(Y') = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det \Lambda')^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} Y'^T \Gamma' Y' \right] \tag{A 19}$$

que mostra que as novas variáveis y'_n resultantes da transformação linear (A 5) possuem igualmente uma distribuição multinormal, sendo a matriz das correlações dada por (A 7).

Este resultado é muito importante, pois permite-nos, por uma escolha conveniente da transformação A, simplificar notavelmente a expressão de distribuição.

Assim, é possível obter um novo conjunto de variáveis cuja matriz de correlações seja diagonal. Na realidade, sendo Λ simétrica, basta usar na transformação $Y = AX$ uma matriz A ortogonal (1) cujas linhas sejam constituídas pelos vectores próprios normados de Λ.

Nestas condições, a nova matriz Λ' será diagonal, sendo os seus elementos não nulos os valores próprios de Λ.

---

(1) Se os vectores linhas são ortogonais entre si e normados, tem-se $\sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$.

Fazendo $a_{jk} = b_{kj}$, tem-se $\sum_k a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}$, ou seja $AB = I$. Mas $B = A^T$.

Donde $B = A^{-1} = A^T$ que define a matriz ortogonal. Fácil é de ver que também os vectores colunas resultam ortonormados.

Com efeito, sendo λ_k e X_k um valor próprio e um vector próprio de Λ, tem-se

$$\Lambda X_k = \lambda_k X_k \tag{A 20}$$

Por outro lado prova-se sem dificuldade que, sendo Λ simétrica, os seus valores próprios são reais, e a valores próprios distintos correspondem vectores próprios ortogonais (¹).

Assim, sendo

$$A = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_N^T \end{bmatrix} \tag{A 21}$$

a matriz Λ' calcula-se facilmente.

$$\Lambda' = A\,(\Lambda A^T) = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \cdots & \lambda_N X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \tag{A 22}$$

dada a ortonormalidade dos X_k.

Ou seja

$$\lambda'_{ik} = \lambda_k \delta_{ik} \tag{A 23}$$

o que prova que a matriz de correlação Λ' é de facto diagonal.

Se introduzirmos agora este resultado (A 22, A 23) na expressão geral (A 19) da distribuição p (Y'), e atendermos a (A 17), obteremos a forma simplificada pretendida.

Assim,

$$p\,(Y') = p\,(y'_1, y'_2, \ldots y'_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \cdot \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y'^2_i}{\lambda_i}\right] \tag{A 24}$$

que se pode escrever sob a forma dum produto de N factores semelhantes

$$p\,(y'_1, y'_2, \ldots y'_N) = \prod_{i=1}^{N} p\,(y'_i) \tag{A 25}$$

em que

$$p\,(y'_i) = \frac{1}{(2\pi\lambda_i)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y'^2_i}{\lambda_i}\right) \tag{A 26}$$

Notemos finalmente que o facto de Λ' ser uma matriz de correlações nos mostra que se tem

$$\lambda_k = \lambda'_{kk} = E\, y'^2_k > o \tag{A 27}$$

Os valores próprios de Λ, além de reais são, portanto, *positivos*.

Por outro lado, do carácter ortogonal de A resulta

$$\det \Lambda' = \det \Lambda = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N > o \tag{A 28}$$

Assim, o determinante da matriz das correlações mantém-se invariante sob uma transformação ortogonal e é positivo.

(¹) Se se der o caso de n valores próprios serem iguais, ao valor comum corresponderá um espaço vectorial de dimensão n, donde é possível obter n vectores ortogonais entre si.

BIBLIOGRAFIA

Brigham — *The Fast Fourier Transform.* Prentice-Hall (1974).

Brillinger — *Time Series. Data Analysis and Theory,* Holt, Rinehart and Winston (1975).

Brillinger & Rosenblatt — Asymptotic Theory of Estimates of kth Order Spectra — in *Spectral Analysis of Time Series,* ed. Harris — J. Wiley (1967).

Brillinger & Rosenblatt — Computation and Interpretation of kth Order Spectra — in *Spectral Analysis of Time Series, ed. Harris* — J. Wiley (1967).

Davenport & Root — *Random Signals and Noise* — McGraw-Hill (1958).

Hasselman, Munk & MacDonald — Bispectra of Ocean Waves — in *Time Series Analysis,* ed. Rosenblatt — J. Wiley (1963).

Haubrich — Earth Noise, 5 to 500 Millicycles per second — *Journ. Geoph. Research,* 70, 1415 (1965).

Jenkins & Watts — *Spectral Analysis and its Applications* — Holden-Day (1968).

MacDonald — The Bispectra of Atmospheric Pressure Records — in *Proc. IBM Scientific Computing Symposium on Statistics,* ed. IBM (1965).

Madden — Spectral, Cross-Spectral and Bispectral Analysis of Low Frequency Electromagnetic Data — in *Natural Electromagnetic Phenomena Below 30 kc/s — Plenum Press* (1964).

Rebelo Simões — *Determinação do Bispectro dum Sinal Aleatório com Aplicação à Estimação de Sinais em Ruído Forte* — Tese de Doutoramento, I. S. T. (1971).

Rebelo Simões — Análise Espectral de 2.ª e 3.ª Ordens em Sistemas Não-Lineares de 2.ª Ordem — Parte I: Expressões Teóricas — in *II Simpósio Sobre as Teorias da Informação e dos Sistemas,* F. E. U. P. (1972).

Rebelo Simões & Miranda Mourão — Análise Espectral de 2.ª e 3.ª Ordens em Sistemas Não-Lineares de 2.ª Ordem — Parte II: Aspectos Computacionais — in *II Simpósio Sobre as Teorias da Informação e dos Sistemas,* F. E. U. P. (1972).

Stratonovich — *Topics in the Theory of Random Noise, Vol. I* — Gordon and Breach (1963).

Vários Autores — Papers on Spectral Analysis — in *Technometrics,* 3 (1961).

2.º Congresso Nacional de Mecânica Teórica Aplicada

Lisboa, 2 a 7 de Abril de 1979

Temas: Mecânica Geral; Mecânica dos Fluidos; Mecânica dos Sólidos e dos Materiais; Biomecânica.

Comunicações — Datas limite: Resumos (300 palavras): 1-10-78; Comunicação da aceitação: 1-11-78; Texto definitivo: 31-12-78.

Informações e inscrições provisórias: Comissão Portuguesa de Mecânica, Instituto Superior Técnico, Laboratório de Resistência de Materiais, Av. Rovisco Pais — Lisboa 1. Tel. 801579.

Teoria da Informação

Realizar-se-á em Grignano, Itália, próximo de Trieste, de 25 a 29 de Junho de 1979, o Simpósio Internacional sobre Teoria da Informação, promovido pelo I. E. E. E. Os artigos deverão ser enviados até 1 de Dezembro de 1978. Para mais informação consultar o noticiário dos últimos números da revista «IEEE Trans. on Information Theory».

BASES DEL CONCURSO DE ARTÍCULOS

Convocado por

CEMENTO - HORMIGON — revista técnica — con motivo de su 50 aniversario — 1929 - 1979

B A S E S :

1 — Se convoca un Concurso de trabajos propios para ser publicados en esta Revista, entre autores de cualquier nacionalidad.

2 — Los trabajos presentados deben ser originales e inéditos. La extensión mínima de los mismos deberá ser de 10 páginas de nuestra Revista que equivalen aproximadamente a 30 hojas de tamaño folio mecanografiadas a doble espacio. Los trabajos deben ser presentados en idioma español.

3 — Los trabajos deberán, remitirse, por correo certificado, a CEMENTO - HORMIGON Revista Técnica, calle Maignón, 26, Barcelona-24 (España) antes del día 31 de marzo de 1979 en sobre cerrado con un Lema. En sobre aparte y bajo el mismo Lema debe remitirse el nombre y dirección del autor.

4 — Se concederán los siguintes premios:

A) Premio CEMENTO-HORMIGON, Revista Técnica, dotado con 75.000 Ptas. al mejor trabajo presentado sobre el Tema «EL AHORRO DE ENERGIA EN EL PROCESO DE FABRICACION DEL CEMENTO».

Si el Jurado lo considera oportuno además de este premio podrá otorgarse un accésit de 50.000 Ptas.

B) Premio ASOCIACION NACIONAL ESPAÑOLA DE FBARICANTES DE HORMIGON PREPARADO (ANEFHOP), dotado con 75.000 pesetas al mejor trabajo presentado sobre el Tema «ASPECTOS ECONOMICOS DEL EMPLEO DEL HORMIGON PREPARADO».

Si el Jurado lo considera oportuno además de este premio podrá otorgarse un accésit de 50.000 Ptas.

C) Premio AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA. OFICEMEN, dotado con 75.000 Ptas. al mejor trabajo presentado sobre un Tema relacionado con alguna «REALIZACION DE HORMIGON EN OBRAS URBANAS Y CIVILES».

Si el Jurado lo considera oportuno además de este premio podrá otorgarse un accésit de 50.000 Ptas.

5 — Dos Jurados compuestos por eminentes especialistas de la industria del cemento y de la construcción, juzgarán los trabajos que se presenten al Concurso, siendo su fallo inapelable.

6 — Los premios pueden declararse desiertos, si a juicio de los respectivos Jurados ninguno de los trabajos presentados merece ser objeto de distinción.

7 — El resultado del Concurso se publicará, junto con las Actas de los Jurados, en las páginas de esta Revista.

8 — Los premios serán otorgados dentro de los actos conmemorativos a celebrar con motivo del 50 Aniversario de la Revista CEMENTO-HORMIGON.

9 — Los derechos de reproducción total o parcial de los trabajos premiados, pertenecerán exclusivamente a CEMENTO-HORMIGON, Revista Técnica, sin cuya autorización no se podrán publicar en ningún idioma.

10 — CEMENTO-HORMIGON publicará íntegramente los trabajos premiados y se reserva el derecho de reproducir cuantos trabajos se presenten al Concurso con carácter preferencial.

Barcelona, Abril de 1978

JURADO TEMA CEMENTO — *Presidente:* Paticio Palomar Collado, Dr. Ingeniero Industrial. *Vocales:* José Calleja Carrete, Dr. en Ciencias Químicas; José María Clavería Roc, Dr. Ingeniero de Minas; César García Montón, Dr. Ingeniero Industrial; Rafael Martínez Ynzenga, Dr. Ingeniero Industrial; Patricio Palomar Llovet, Dr. Ingeniero Industrial; Julián Rezola Izaguirre, Ingeniero Químico Dipl. I. Q. S.; Jorge Villavecchia Delás, Dr. Ingeniero Industrial.

JURADO TEMAS HORMIGÓN — *Presidente:* José María Aguirre Gonzalo, Dr. Ingeniero de Caminos. *Vocales:* Francisco Arredondo y Verdú, Dr. Ingeniero de Caminos; Oriol Bohigas Guardiola, Dr. Arquitecto; Ernesto Garau Llari, Dr. Ingeniero Industrial; Manuel Federico Goudie y Monteverde, Presidente de ANEFHOP; Antonio Lamela Martínez, Dr. Arquitecto; José Antonio Torroja Cavanillas, D. Ingeniero de Caminos; José Ignacio Vallejo-Nágera, Ingeniero del I. C. A. I.

CEMENTO - HORMIGON — Maignón, 26. Barcelona - 24. Epaña. Tels. 214 41 78 - 214 43 18 - 214 42 58.

(Continua na pág. 78)

Para a indústria etiquetas auto-adesivas tesa.

As etiquetas auto-adesivas Tesa, permitem a impressão antecipada, de marcas, preços, referências e instruções de utilização para um sem número de artigos. Oferecendo grande economia de mão-de-obra, porque dispensam a cola e o respectivo tempo de secagem, as etiquetas Tesa aderem à maioria dos materiais. Consoante a utilização industrial a que se destinam, as etiquetas Tesa são permanentes ou destacáveis.

Estas últimas retiram-se facilmente sem deixar quaisquer resíduos.

O sistema de etiquetagem Tesa integra desenroladores manuais e máquinas automáticas ou semi-automáticas para aplicação das etiquetas auto-adesivas.

tesa

DEPARTAMENTO INDÚSTRIA

Tesa, sempre a solução do seu caso.

PARA MAIS INFORMAÇÕES CONSULTE O DEPARTAMENTO TESA DA BEIERSDORF PORTUGUESA, LDA.
Est. de Barcarena – Queluz de Baixo Tel. 95 61 71 ou Delegação no Norte – R. Gonçalo Sampaio, 164-178 – Porto Tel. 69 11 53/4/5

ACESSÓRIOS FORJADOS PARA CABO DE ARAME E CADEIAS

Os homens que dão valor às suas vidas e a cargas insistem nos grampos, algemas, rótulas, tensores, olhais, fichas, mangas, parafusos para olhais e retentores de cargas Lebus da Crosby . . . todos fabricados de aço reformado e temperado para maior resistência. Uma gama completa de talhas McKissick e Western e protectores para cabos de arame.

Para obter o catálogo ou mais informações, queira contactar:

the Crosby group

amhoist AMERICAN HOIST INTERNATIONAL CORPORATION

Crosby LAUGHLIN (UK) LTD
Carlton Chambers,
Station Road, Shortlands,
Bromley BR2 0EY, England.
Telex 896558CLUK

N.V. Crosby EUROPE
Leuvensebaan 51
2870 Putte (Mechelen)
Belgium
Telex 25312

Já pensou...

...que o seu anúncio é muito eficaz se for publicado na revista que os seus clientes lêem? Os milhares de exemplares de cada número da nossa revista são lidos por engenheiros e técnicos, por pessoas ligadas à indústria, à investigação, ao ensino, pelos seus clientes, em suma. Consulte-nos

técnica

REVISTA DE ENGENHARIA Avenida Rovisco Pais — Lisboa-1 — Telef. 88 93 23

NÚMERO 449/450 SETEMBRO/OUTUBRO 1978 ANO LIII VOLUME XL

C. D. U. 533.2:530.12

Em homenagem ao Professor Aureliano de Mira Fernandes

Sobre a elasticidade relativista dos corpos rígidos

I — A lei de Hooke relativista

ANTÓNIO BROTAS
Instituto Superior Técnico
Universidade Técnica de Lisboa

RESUMO

Prepõe-se a introdução nos cursos de iniciação à Teoria da Relatividade das fórmulas da elasticidade relativista dos corpos rígidos, estabelecidas por Mc Crea por processos elementares.

Os paradoxos relacionados com o movimento dos corpos rígidos em Relatividade (paradoxo do disco a rodar e paradoxo dos 3 graus de liberdade dos corpos rígidos em Relatividade Restritiva) podem ser esclarecidos desde que se faça a distinção entre os conceitos de rígido e indeformável.

É apresentada a equação do movimento (com deformação) de uma barra rígida não homogénea.

SUMMARY

We propose the introduction in the elementary courses about The Theory of Relativity of the relativistic formulas of rigid bodies elasticity established by Mc Crea by elementary processes.

The paradoxes relationed with the mouvement of the rigid bodies in the Theory of Relativity (the paradox of the sliding disc and the paradox of the three degrees of freedom of rigid bodies in the Special Theory of Relativity) can become clear if we disting the concepts of rigid and indeformable.

We present the equation of the mouvement (with deformation) of a non-homogeneous bar.

A «elasticidade relativista dos corpos rígidos» é uma matéria de todo ignorada nos tratados de Relatividade (*) e só referida numa meia dúzia de quase desconhecidos artigos. A sua inclusão nos cursos de iniciação é, no entanto, possível e inteiramente natural. Estou certo que, quando se generalizar, fará desaparecer pela base um conjunto de «paradoxos» actualmente considerados como ainda não esclarecidos pela maioria dos relativistas.

A nota que se segue é facilmente compreensível para quem conheça a Teoria da Relatividade, tal como há uns anos atrás era ensinada nas cadeiras de Física e de Mecânica Racional do I. S. T. Ao apresentá-la, faço votos para que, a breve prazo, surja na escola o interesse suficiente para que este tipo de matérias possa, de novo, nela ser ensinado.

* * *

Vamos admitir que corpo rígido é aquele em que as ondas de choque se propagam com a velocidade c (ver nota 1, página [77].

Consideremos uma barra rígida, homogénea, de secção S_0, comprimento l_0 e densidade ρ_0 no referencial próprio.

Vamos supor que esta barra se desloca num referencial A (ver nota 2, pág. [77] com uma velocidades v. Neste referencial A a secção, o comprimento, a energia e a quantidade de movimento da barra são dados, respectivamente, por:

$$S = S_0 \quad ; \quad l = l_0 \sqrt{1-\beta^2} \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

1)

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{S_0 l_0 \rho_0^0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} ; P = \frac{v S_0 l_0 \rho_0^0}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Vamos admitir que num dado instante t_1 (t — tempo de referencial A) uma extremidade da barra, a extremidade da frente, por exemplo, pára devido ao

(*) C. MOLLER, por exemplo, no seu tratado «The Theory of Relativity» dedica algumas poucas páginas ao estudo dos sólidos elásticos. A pág. 179 (da edição de 1962) escreve: «O tensor das tensões está relacionado com a deformação interna da matéria. No referencial próprio esta conexão é dada pelas equações da teoria da elasticidade usual; assim, para as pequenas deformações é dada pela lei de Hooke». Falta, pois, o essencial, a determinação da lei elástica relativista.

Manuscrito recebido para publicação em 7/7/78.

choque com uma parede indeformável, ou com uma barra igual vinda em sentido contrário com a mesma velocidade v (ver nota 3 página [77]. A segunda extremidade da barra continua em movimento com a velocidade v. Uma vez que supomos o material rígido, o efeito do choque propaga-se com a velocidade c. Um cálculo elementar mostra-nos que a extremidade que continuou em movimento só é atingida por este efeito no instante

$$2) \qquad t_2 = t_1 + \frac{l_0 \sqrt{1-\beta^2}}{c+v}$$

Vamos admitir que a onda de choque, que se propaga ao longo da barra, separa uma parte que fica parada e comprimida da parte não comprimida e ainda em movimento. No instante t_2, a barra está inteiramente parada (em A) e o seu comprimento é

$$3) \qquad l_c = l_0 \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{c}{c+v}$$

Se admitirmos que a barra é elástica o choque deve ser reversível. Neste caso a partir do instante t_2, a segunda extremidade deve voltar para trás com a velocidade v, e no interior da barra uma onda de choque (de sentido contrário à anterior) deve separar a parte não comprimida, e de novo em movimento, da parte comprimida e em repouso.

No instante $t_3 = 2\,t_2 - t_1$, a onda de choque atinge a extremidade que inicialmente foi parada e a barra volta, de novo, a estar toda em movimento com a velocidade v, mas agora em sentido contrário.

Durante o intervalo $[t_1, t_3]$ a extremidade da barra que chocou mantém-se encostada à parede (ou à outra barra) que sobre ela exerce uma força que representamos por F.

Sendo o choque elástico e reversível a energia mantém-se constante.

Concluimos, assim, que a energia da barra parada e comprimida com o comprimento l_c deve ser igual à energia $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ da barra não comprimida e com a velocidade v.

Esta informação é suficiente para determinar a lei elástica do material rígido.

Imaginemos, com efeito, um processo lento de compressão de uma barra (imóvel em A) desde o comprimento l_0 até ao comprimento l_c.

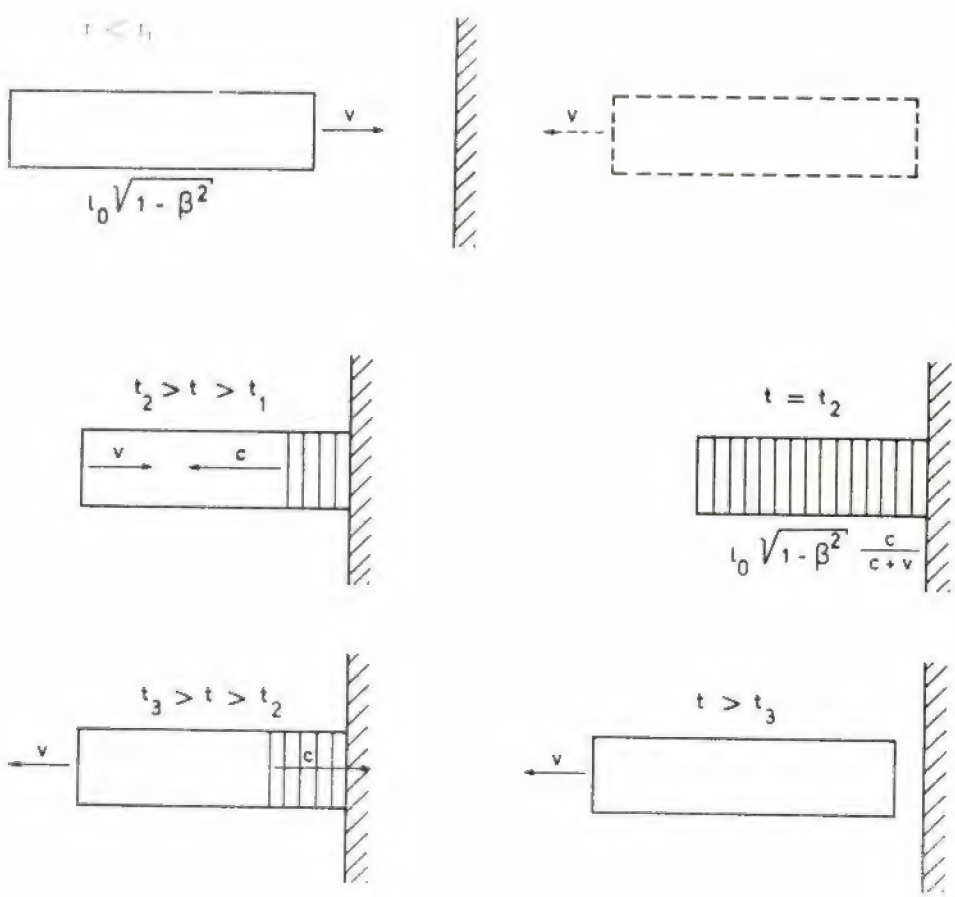


Fig. 1

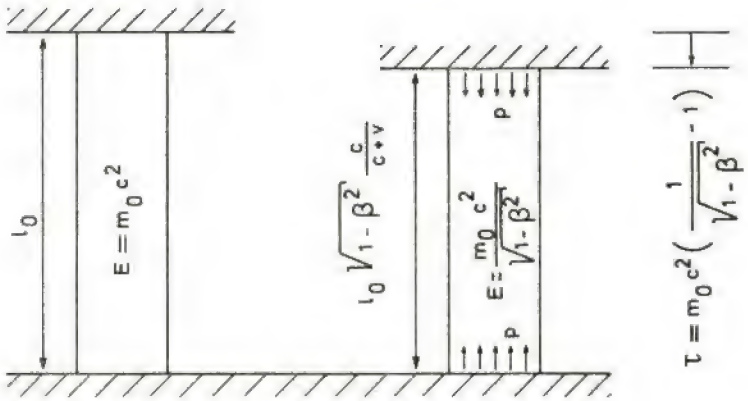


Fig. 2

O trabalho dispendido deve ser igual ao aumento de energia

4) $$z = \Delta E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

Fazendo

5) $$s_c = \frac{l_c}{l_0} = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{c}{c+v}$$

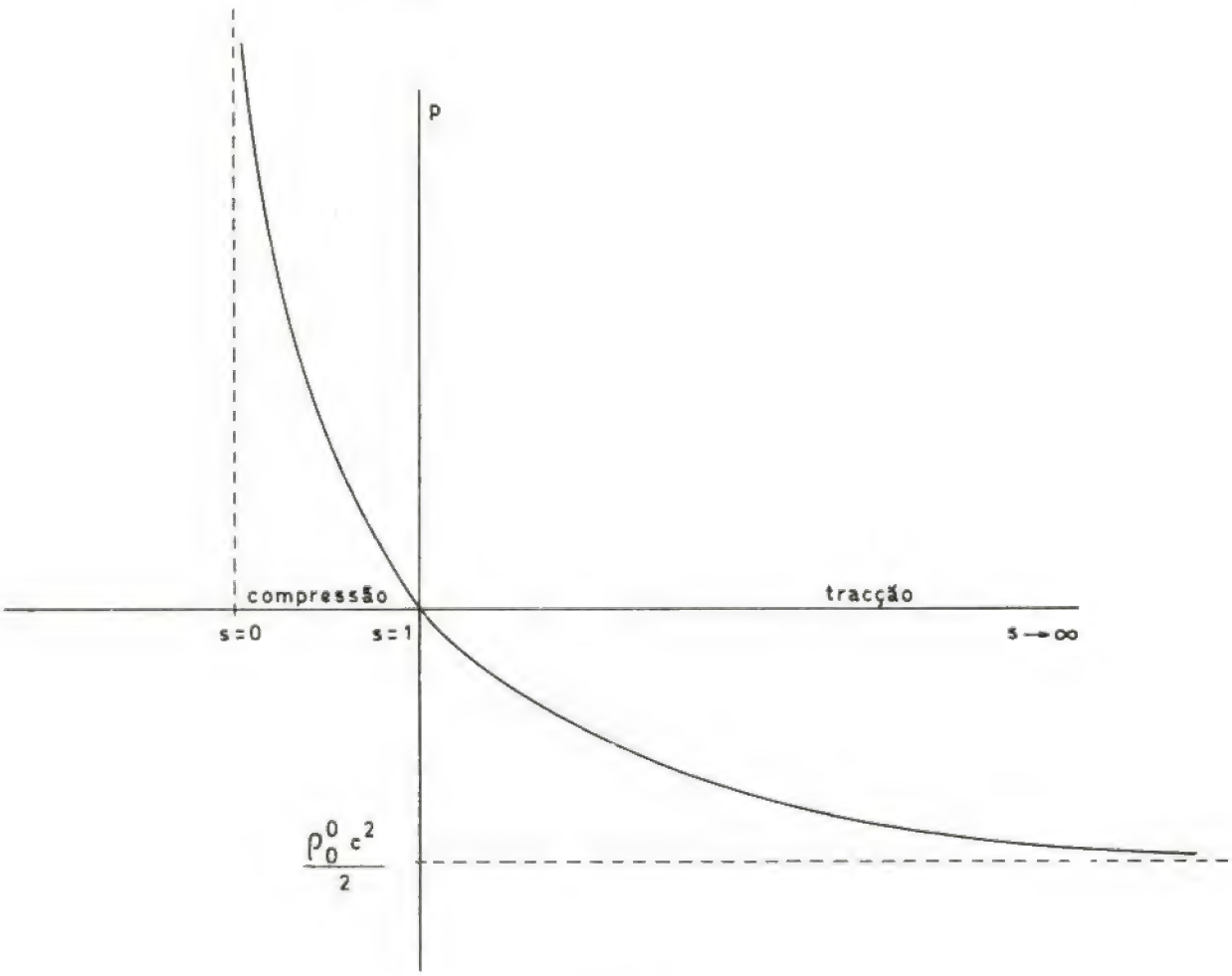


Fig. 3

e usando as relações

$$6)\quad s_e = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}\ ;\ s_e + \frac{1}{s_e} = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

podemos escrever

$$7)\quad z = \frac{m_0 c^2}{2}\left(s_e + \frac{1}{s_e} - 2\right)$$

Por outro lado, sendo p a pressão na secção transversal da barra, variável durante a compreensão, podemos escrever

$$8)\quad z = -S_0 \int_{l_0}^{l_e} p\, dl = -S_0 l_0 \int_{1}^{s_e} p\, ds$$

Tendo em conta que as duas últimas expressões de z devem ser iguais qualquer que seja o valor de s_e, derivando, obtemos

$$9)\quad \frac{m_0 c^2}{2}\left(1 - \frac{1}{s_e^2}\right) = -S_0 l_0 p(S_e)$$

ou (escrevendo s em vez de s_e)

$$10)\quad p = \frac{\rho_0^0 c^2}{2}\left(\frac{1}{s^2} - 1\right)$$

É esta a lei elástica dos corpos rígidos, lei não linear, que podemos considerar como a correspondência relativista no caso limite dos corpos rígidos da lei de Hooke (ver nota 4, página [77].

Como seria de esperar, do lado da compressão, p tende para infinito quando s tende para zero.

Do lado da tracção é curioso verificar que p tendo assintoticamente para $\frac{\rho_0^0 c^2}{2}$ quando s tende para infinito (ver nota 5, página [77].

Nesta concepção, os corpos rígidos aparecem, assim, como corpos que se podem esticar indefinidamente sem nunca atingir uma tensão infinita.

Representamos por ρ_0^0 a densidade de um corpo rígido, no referencial próprio, quando não comprimido. Tem interesse conhecer $\rho_0 = \rho_0^{(s)}$, densidade do mesmo corpo, no referencial próprio, quando deformado.

A relação

$$11)\quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho_0 c^2 l_e S$$

permite-nos, facilmente, chegar ao resultado

$$12)\quad \rho_0 = \frac{\rho_0^0}{2}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$$

Quando s tende para infinito, ρ_0^0 tende para um valor que é metade da densidade inicial.

* * *

Indiquemos agora um segundo caminho para chegar ao resultado 10), que pode ser olhado como uma confirmação da hipótese que fizemos sobre a propagação das ondas de choque no interior da barra.

Consideremos um intervalo de tempo Δt contido no intervalo $[t_1, t_2]$. Representemos por Δm_0 a quantidade de massa própria (não comprimida) que no intrevalo Δt passa do estado de movimento ao repouso (em A).

Um estudo cinemático relativamente simples permite-nos escrever

$$13)\quad \Delta m_0 = \frac{S(v+c)\, v\, \rho_0^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

A variação da quantidade de movimento da barra neste intervalo de tempo Δt é dada por

$$14)\quad \Delta P = \frac{\Delta m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \frac{S(v+c)\, v\, \rho_0^0 \Delta t}{1-\beta^2}$$

A equação $f = \frac{dP}{dt}$, em que f é a resultante de todas as forças exteriores que se exercem sobre um corpo e $\frac{dP}{dt}$ a sua variação de quantidade de movimento, é válida em Relatividade tal como em Física Clássica.

Durante o intervalo de tempo Δt a única força que se exerce sobre a barra é a força que atrás designamos por F. Temos ainda, manifestamente, $F = p.S$, sendo p a pressão nas secções da barra já comprimidas.

Reunindo estes elementos podemos escrever

$$15)\quad p = \frac{1}{S}\frac{dP}{dt} = \frac{v(v+c)}{1-\beta^2}\ \rho_0^0 = \frac{\beta c^2 \rho_0^0}{1-\beta} = \frac{\rho_0^0 c^2}{2}\left(\frac{1}{s^2} - 1\right)$$

o que condiz com o resultado anterior.

NOTA TERMINAL

Os resultados expostos, embora muito simples e baseados em noções elementares de Relatividade, só foram publicados pela primeira vez em 1952, nos artigos de Mc Crea citados na bibliografia. No primeiro artigo, Mc Crea deduz a equação da relatividade dos corpos rígidos a partir da conservação da energia e no segundo, em colaboração com Hogarth, faz uma verificação usando a conservação da quantidade de movimento.

Tive conhecimento destes artigos por intermédio do artigo de Cavalleri, numa altura em que estudava o disco a rodar. Convencera-me de que o problema do disco era um problema de elasticidade, mas a duas dimensões. Tinha chegado aos mesmos resultados de Mc Crea (só que encontrados por ordem inversa, primeiro a partir da quantidade de movimento e depois da energia) e tinha encontrado uma generalização para o caso a duas dimensões que não considero inteiramente satisfatória. Na ocasião escrevi a Mc Crea a perguntar-lhe se tinha avançado para além dos artigos de 52 e se tinha utilizado as suas fórmulas no disco a rodar.

Respondeu-me, com grande gentileza, dizendo que não, mas que, como eu bem suspeitara, sempre tinha continuado a pensar no problema do disco a rodar.

Este assunto pode, eventualmente, ter interessantes possibilidades de desenvolvimento. Um deles (que se afigura muito duro) é o estudo das ondas transversais nos corpos rígidos. O estabelecimento de convincentes fórmulas de elasticidade a 2 e 3 dimensões terá ,eventualmente, de ser feito em conjugação com o estudo destas ondas transversais.

No caso a uma dimensão, a equação que julgo inédita

$$16)\quad \frac{\partial \rho_0^0}{\partial \bar{x}} \times \left\{ -\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right)^2 + 1 \right\} + \rho^0 \left\{ -2\,\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2} + \frac{2}{c^2}\,\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} \right\} = 0$$

(em que x e t são as coordenadas do referencial de inércia e $\bar{x}$ a coordenada associada aos diferentes pontos duma barra e correspondente às distâncias medidas sobre a barra quando não deformada) é a equação do movimento longitudinal de uma barra rígida não homogénea: $\rho_0^0 = \rho_0^0(\bar{x})$ variável.

O estabelecimento desta equação exige bastante trabalho e muito cuidado no manipular das componentes do tensor impulsão energia expresso nos referências de inércia correspondentes em cada instante a cada ponto da barra. Mas exige, sobretudo, a convicção inicial de que se vai chegar ao mesmo resultado quer se utilize a conservação da energia quer se utilize a conservação da quantidade de movimento.

BIBLIOGRAFIA

[1] **Mc. Crea** — Sci. Proc. R. Dublin Soc 26 (1952).

[2] **Hogarth** e **Mc. Crea** — Proc. Cambr. Phil. Soc. 48, p. 616 (1952).

[3] **C. Cavalleri** — Nuovo Cimento. 53, 2 B (1968).

[4] **A. Brotas** — C. R. Acad. Sc. Paris t 267 (1968).

[5] **A. Brotas** — L. Nuovo Cimento (Fev. 1969).

[6] **A. Brotas** — These. Paris. A. O. 3081.

---

1) O corpo rígido relativista é, portanto, nesta concepção um corpo deformável. Foi, exactamente, a identificação entre rígido e indeformável que, trazida da Física Clássica para a Relatividade, deu origem a uma série de paradoxos relacionados com a dificuldade em compreender o movimento dos corpos rígidos (e por extensão dos sólidos em geral) em Relatividade. O mais célebre destes paradoxos é o paradoxo do disco a rodar segundo o qual em Relatividade Restrita um disco indeformável que esteja a rodar não pode parar e um disco que esteja parado não pode entrar em rotação. Estas dificuldades são aspectos particulares do paradoxo mais geral, posto em evidência por Born, que consiste no facto de em Relatividade Restrita os corpos rígidos-indeformáveis terem só 3 graus de liberdade. Em face desta dificuldade a quase totalidade dos autores que abordam o assunto abandonam o estudo do problema no âmbito da Relatividade Restrita e procuram encontrar no quadro da Relatividade Generalizada, à custa das deformações do espaço-tempo, os 6 graus de liberdade que não encontram em Relatividade Restrita. Os trabalhos deste tipo tornam-se, em geral, extremamente confusos e parece não terem conduzido a nenhumas conclusões claras. A via preconizada neste artigo é a oposta. A identificação entre indeformável e rígido é quebrada. Indeformável é olhado como uma noção geométrica. Rígido como uma noção física. Corpo rígido significa simplesmente o corpo mais rígido possível. Em Física Clássica, nada se opõe a que consideremos ser indeformável o corpo mais rígido possível. Em Relatividade, temos a imposição das ondas não se propagarem com velocidade superior à da luz. Daqui a necessidade do corpo rígido ser deformável.

2) Sempre que neste texto falamos em referencial deverá ser entendido referencial de inércia. A noção de referenciais não de inércia da Física Clássica estava associada à noção de corpos rígidos que embora sujeitas a forças se não deformavam. Como em Relatividade excluimos a ideia de corpos rígidos-indeformáveis temos também de por de lado a noção de referenciais não de inércia.

3) A barra a vir do outro lado é um artifício para evitar falar em parede indeformável.

Neste texto escrevemos, em geral, compressão mas todas as fórmulas e raciocínios são válidas para as tracções. Há, porém, que imaginar um dispositivo mais sofisticado para parar a extremidade de traz da barra.

4) No caso de um material não rígido limite as ondas de choque devem-se propagar no material não comprimido e no referencial próprio com uma velocidade a inferior a c. A partir deste dado pode ser determinada a lei elástica.

5) No limite, em valor absoluto, a relação $\frac{p}{\rho_0^0}$ é igual à relação entre a pressão e a densidade de uma onda electromagnética. Neste caso o sinal vem, porém, trocado porque p é uma tracção.

CURSOS DE FORMAÇÃO EM HIDROLOGIA

A — INTRODUÇÃO

O C. E. S. U. R. (Centro de Sistemas Urbanos e Regionais das Universidades de Lisboa), os departamentos de Hidráulica e de Urbanização e Sistemas do I. S. T. julgaram oportuno realizar em colaboração com a Direcção Geral dos Recursos e Aproveitamentos Hidráulicos dois Cursos sobre Hidrologia. Estes cursos não têm características de curso intensivo e têm como objectivo contribuir para uma preparação científica de base e conhecimentos técnicos actualizados que permitam aos licenciados interessados em Hidrologia — no domínio do palneamento, do projecto ou da gestão — utilizar convenientemente as potencialidades quer da Hidrologia Física, quer da Hidrologia Estatística.

Durante estes cursos serão apresentados casos de aplicação e os participantes terão a possibilidade de utilizar o Centro de Cálculo das Universidade de Lisboa e as bibliotecas do C. E. S. U. R. e do I. S. T.

B — DESCRIÇÃO DOS CURSOS

CURSO SOBRE HIDROLOGIA FISICA (HF)

1. PROGRAMA:

— Descrição física dos processos hidrológicos
— Variáveis hidrológicas
— Medições hidrológicas e redes de observação
— Processamento, crítica e publicação de dados
— Modelos determinísticos

2. DOCENTES

Director: António Quintela (I. S. T.); Pinto Peixoto (Fac. de Ciências); Zózimo Rego (I. S. A.); Emídio Santos (I. S. T.); João Hipólito (I. S. T.).

CURSO SOBRE HIDROLOGIA ESTATISTICA (HE)

1. PROGRAMA:

— A teoria do aleatório e os tipos de variabilidade hidrológica
— Fundamentos da Teoria das Probabilidades e da Informação úteis à Hidrologia
— Descrição, filtragem e síntese estatísticas em Hidrologia
— Inferência e Amostragem

2. DOCENTES

Director: Luís Valadares Tavares (I. S. T. e C. E. S. U. R); Técnicos da D. G. R. A. H.; F. Nunes Correia (I. S. T.); J. E. Silva (I. S. T.); A. Porta Nova (C. E. S. U. R. e I. S. T.); Delmar Baptista (C. E. S. U. R. e I. S. T.)

3. CONDIÇÕES GERAIS:

Estes cursos realizam-se no C. E. S. U. R. (I. S. T., Av. Rovisco Pais, Lisboa) com o seguinte horário: 9h30 - 12h30.

O curso HF decorre de 2-11-78 a 17-11-78 e o de HE de 20-11-78 a 6-12-78.

Quaisquer esclarecimentos adicionais podem ser obtidos através de: L. Valadares Tavares (C. E. S. U. R., Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, Lisboa. Tel. 88 29 92).

Os participantes que desejem obter um certificado de aproveitamento podem requerer, para tal efeito, a realização de uma prova que terá lugar a seguir ao final da cada curso.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 449/450

Ano LIII — Setembro/Outubro 1978

C. D. U. 51.951

MONTEIRO, António Aniceto — *Conjuntos graduados de Zadeh*, «Técnica», Lisboa, LIII (449/450) Set./Out. 1978, p. 11-34.

C. D. U. 311.15:535.33

SIMÕES, F. E. Rebelo — *Alguns aspectos da correlação de 3.ª ordem e do bispectro dos processos estacionários*, «Técnica», Lisboa, LIII (449/450) Set./Out. 1978, p. 45-71.

Introduzem-se, como generalização da 2.ª ordem, os conceitos de correlação de 3.ª ordem e de espectro de 3.ª ordem (bispectro) dos processos estacionários, estudando-se as suas simetrias. Faz-se em seguida idêntica extensão para correlações e espectros cruzados. Estabelecem-se as relações entrada-saída de sistemas lineares invariantes para correlações e espectros. Considera-se o caso particular dos processos gaussianos estacionários de média nula, para os quais se verifica que o bispectro é nulo, deduzindo-se daí as aplicações práticas desta análise. Interpreta-se a seguir o bispectro como resultado de filtragens lineares, à semelhança do que se faz para o espectro de potência. Finalmente indicam-se alguns tópicos sobre a computação do espectro de potência e do bispectro, comentando-se os prós e os contras da análise espectral de 3.ª ordem.

C. D. U. 538.3

FARO, M. Abreu — *Sobre o estabelecimento das condições fronteiras de natureza electrodinâmica numa superfície em movimento*, «Técnica», Lisboa, LIII (449/450) Set./Out. 1978, p. 35-44.

É demonstrado que as condições fronteiras numa superfície em movimento se podem obter a partir das condições fronteiras dos corpos em repouso utilizando a Transformação de Lorentz que imobiliza num determinado referencial o ponto em movimento da referida superfície.

Para tanto, foi necessário o prévio estabelecimento das leis de transformação das densidades de carga e de corrente superficiais, o que foi feito com generalidade.

As condições fronteiras estabelecidas coincidem com as condições fronteiras obtidas a partir da forma integral das equações de Maxwell e utilizando os teoremas de Helmholtz associados a superfícies e contornos deformáveis no tempo.

Na demonstração postula-se que determinados integrais tendem para zero o que é fisicamente aceitável mas obriga a analisar com cuidado os modelos em causa e as leis de variações expectáveis das densidades de carga e de corrente.

C. D. U. 533.2:530.12

BROTAS, António — *Sobre a elasticidade relativista dos corpos rígidos: a lei de Hooke relativista*, «Técnica», Lisboa, LIII (449/450) Set./Out. 1978, p. 73-77.

Propõe-se a introdução nos cursos de iniciação à Teoria da Relatividade das fórmulas da elasticidade relativista dos corpos rígidos, estabelecidas por Mc Crea por processos elementares.

Os paradoxos relacionados com o movimento dos corpos rígidos em Relatividade (paradoxo do disco a rodar e paradoxo dos 3 graus de liberdade dos corpos rígidos em Relatividade Restritiva) podem ser esclarecidos desde que se faça a distinção entre os conceitos de rígido e indeformável.

É apresentada a equação do movimento (com deformação) de uma barra rígida não homogénea.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 449/450

LIII September/October 1978

U. D. C. 311.15:535.33

SIMÕES, F. E. Rebelo — *Some aspects of the 3rd order correlation and of the bispectrum of stationary processes*, «Técnica», Lisboa, LIII (449/450) Set./ /Out. 1978, p. 45-71.

As generalization of 2nd order analysis, the concepts of 3rd order correlation and 3rd order spectrum (bispectrum) of stationary processes are introduced, and their symmetry properties are studied. Identical extension for cross correlations and cross spectra is made. The input-output relations for correlations and spectra are established in linear time-invariant systems. The gaussian case is considered in which the bispectrum is shown to be zero. Some practical applications of this fact are presented. Next the bispectrum is interpreted as a result of linear filtering operations, like power spectrum. Finally some topics on the computation of power spectrum and bispectrum are indicated, with comments on the advantages and limitations of 3rd order spectral analysis.

U. D. C. 51.951

MONTEIRO, António Aniceto — *On fuzzy sets*, «Técnica», Lisboa, LIII (449/450) Set./Out. 1978, p. 11-34.

U. D. C. 533.2:530.12

BROTAS, António — *On the relativistic elasticity of the rigid bodies: relativistic Hooke's law*, «Técnica», Lisboa, LIII (449/450) Set./Out. 1978, p. 73-77.

We propose the introduction in the elementary courses about The Theory of Relativity of the relativistic formulas of rigid bodies elasticity established by Mc Crea by elementary processes.

The paradoxes relationed with the mouvement of the rigid bodies in the Theory of Relativity (the paradox of the sliding disc and the paradox of the three degrees of freedom of rigid bodies in the Special Theory of Relativity) com become clear if we disting the concepts of rigid and indeformable.

We present the equation of the mouvement (with deformation) of a non-homogeneous bar.

U. D. C. 538.3

FARO, M. Abreu — *On the establishment of electrodynamic boundary conditions at a moving surface*, «Técnica», Lisboa, LIII (449/450) Set./Out. 1978, p. 35-44.

It is shown that the boundary conditions at a moving surface can be obtained from the boundary conditions of bodies at rest using the Lorentz Transformations which immobilizes on a certain frame the point moving at the surface referred to.

This required the previous establishment of the transformation laws of densities of surface charge and current, which was generally accomplished. The boundary conditions established coincide with the boundary conditions obtained from the integral form of Maxwell's equations and using the Helmholtz theorems associated with surfaces and contours deforming with time.

In all of this it was necessary to postulate that certain integrals vanish, which is physically acceptable but requires a careful study of the models in question and of the which may by expected from the charge and current densities.

técnica

REVISTA DE ENGENHARIA DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

ÍNDICE POR ASSUNTOS DOS ARTIGOS PUBLICADOS

NÚMERO 443 A 448 VOLUME XXXIX OUTUBRO DE 1977 A MARÇO DE 1978

Artigo N.º Data Pág.

00 — FUNDAMENTOS GERAIS DO CONHECIMENTO E CULTURA

001 — CIÊNCIA E CONHECIMENTO EM GERAL. SABER. ERUDIÇÃO

C. D. U. 001.2:669.14:621.785

Necessidade de investigação e de desenvolvimento tecnológico em Portugal na área dos tratamentos térmicos dos aços 445-446 12-1-977/78 345
António de Pádua Loureiro

174 — ÉTICA PROFISSIONAL. DEONTOLOGIA

C. D. U. 174:627.89.007.1

Acidentes em obras de engenharia civil e a responsabilidade dos engenheiros. O caso da barragem de Teton 448 3-978 485
António José Correia Mineiro

37 — EDUCAÇÃO

C. D. U. 37.015:378.962

Considerações sobre o tema: A formação do engenheiro 445-446 12-1-977/78 187
H. Simões Santos

371 — ORGANIZAÇÃO DO ENSINO E DAS ESCOLAS. SISTEMAS EDUCACIONAIS

C. D. U. 371.214:378.962

Planificação do calendário escolar 445-446 12-1-977/78 153
José Manuel Fonseca de Moura

C. D. U. 371.214:624

O ensino da engenharia civil no nosso país ... 445-446 12-1-977/78 169
J. S. Brazão Farinha

C. D. U. 371.214:624

Princípios para a reestruturação do ensino da engenharia civil 445-446 12-1-977/78 173
António de Carvalho Quintela

C. D. U. 371.214:622

Nota sobre os cursos universitários portugueses de engenharia de minas 445-446 12-1-977/78 181
José Quintino Rogado

C. D. U. 371.3:378.962

Experiência em pedagogia de grupo 445-446 12-1-977/78 157
Maria de Lourdes Tedeshi Bettencourt
Alfredo Manuel Florenço Tovar de Lemos

378 — ENSINO SUPERIOR. UNIVERSIDADES. FACULDADES. ACADEMIAS

C. D. U. 378:62

A formação do engenheiro. Aspectos genéricos 444 11-977 113
J. F. Borges da Silva

C. D. U. 378:62

A formação do engenheiro. Aspectos específicos 444 11-977 119
J. Ribeiro Sarmento

C. D. U. 378.962

Que futuro para o I. S. T.? 445-446 12-1-977/78 129
E. R. de Arantes e Oliveira

C. D. U. 378.962

Ensino e escolas de engenharia: tópicos para discussão 445-446 12-1-977/78 143
José Manuel Fonseca de Moura

C. D. U. 378.962:371.214

Planificação do calendário escolar 445-446 12-1-977/78 153
José Manuel Fonseca de Moura

Artigo	N.º	Data	Pág.
C. D. U. 378.962:371.3			
Experiência em pedagogia de grupo	445-446	12-1-977/78	157
Maria de Lourdes Tedeschi Bettencourt			
Alfredo Manuel Florenço Tovar de Lemos			
C. D. U. 378.962:62.001			
Ensino de Engenharia e transformação da sociedade	445-446	12-1-977/78	139
L. Valadares Tavares			
C. D. U. 378.962:37.015			
Considerações sobre o tema: a formação do engenheiro	445-446	12-1-977/78	187
H. Simões Santos			
C. D. U. 378.692.4:550.8[624/628]			
O ensino da Geologia no I. S. T. para o curso de Engenharia Civil. Evolução e visão prospectiva	443	10-977	1
L. Aires-Barros			
J. F. Pinharanda			
51 — MATEMATICA			
517 — ANALISE. CALCULO EM GERAL			
C. D. U. 517:697.7:621.47			
Métodos de simulação numérica de colectores solares planos	444	11-977	65
E. Maldonado			
E. Oliveira Fernandes			
518 — MÉTODOS ESPECIAIS DE CALCULO			
C. D. U. 518.5:621.3.016.33			
Solução do trânsito de potência pelo método do desacoplamento	445-446	12-1-977/78	365
J. M. Ferreira de Jesus			
J. P. Sucena Paiva			
519 — ANALISE COMBINATORIA E ESTATISTICA. CALCULO DAS PROBABILIDADES, ETC.			
C. D. U. 519.272.11(092)			
No 2.º centenário do nascimento de Karl Friederich Gauss: Gauss e a regressão linear	444	11-977	61
L. Valadares Tavares			
C. D. U. 519.28:621.313.12			
Estados de avaria parcial de grupos em estudos de reserva girante	445-446	12-1-977/78	267
M. Ferreira de Oliveira			
J. Reis Cardoso			
C. D. U. 519.3:622.2			
Optimização do beneficiamento de sistemas de jazidas minerais. Apropriação racional dos recursos minerais	445-446	12-1-977/78	383
José Quintino Rogado			
53 — FISICA			
532 — MECANICA DOS FLUIDOS. HIDROMECANICA			
C. D. U. 532.54			
Escoamento com superfície livre em canais de secção circular	448	3-978	493
A. Betâmio de Almeida.			
537 — ELECTRICIDADE			
C. D. U. 537.311:621.389			
Simulação numérica das estatísticas de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein e Fermi-Dirac, baseada num gerador de números pseudoaleatórios [1]	443	10-977	19
H. J. S. Abreu Santos			
54 — QUIMICA. CRISTALOGRAFIA. MINERALOGIA			
543 — QUIMICA ANALITICA			
C. D. U. 543.42.64:669.1			
Determinação de coeficientes de repartição sólido/líquido em ligas ternárias Fn-Mn-C ...	445-446	12-1-977/78	355
M. Helena de Melo Carvalho			
55 — GEOLOGIA E CIENCIAS AFINS. METEOROLOGIA			
550 — CIENCIAS AFINS. GEOFISICA			
C. D. U. 550.8[624/628]:378.962.4			
O ensino da Geologia no I. S. T. para o curso de Engenharia Civil. Evolução e visão prospectiva	443	10-977	1
L. Aires-Barros			
J. F. Pinharanda			

Artigo	N.º	Data	Pág.
552 — PETROLOGIA. PETROGRAFIA. LITOLOGIA			
C. D. U. 552.1-067.1			
Ocorrência de Scheelite em rochas calco-silicatadas da região de Vila Franca das Naves ... *A. Ferreira Pinto* *A. F. Barros*	443	10-977	39
62 — ENGENHARIA E TECNOLOGIA EM GERAL			
C. D. U. 62:378			
A formação do engenheiro. Aspectos específicos *J. Ribeiro Sarmento*	444	11-977	119
C. D. U. 62:378			
A formação do engenheiro. Aspectos genéricos *J. F. Borges da Silva*	444	11-977	133
C. D. U. 62.001:378.962			
Ensino de Engenharia e transformação da sociedade ... ... *L. Valadares Tavares*	445-446	12-1-977/78	139
C. D. U. 62.001.5			
Da investigação ao projecto de engenharia ... *Pedro Lourtie* *Ventura Sampaio* *Nelson Esteves* *Mário Cordeiro*	445-446	12-1-977/78	165
C. D. U. 620.163:669.14:621.785			
O controle de qualidade nos tratamentos térmicos ... ... *Antera Valeriana de Seabra*	445-446	12-1-977/78	313
621 — ENGENHARIA MECÂNICA. ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA			
C. D. U. 621.3.016.33:518.5			
Solução do trânsito de potência pelo método do desacoplamento ... ... *J. M. Ferreira de Jesus* *J. P. Sucena Paiva*	445-446	12-1-977/78	365
C. D. U. 621.311.2:621-791			
Alguns aspectos da tecnologia de soldadura na construção de equipamentos para produção de energia ... ... *Salgado Prata*	445-446	12-1-977/78	339
C. D. U. 621.313.12:519.28			
Estados de avaria parcial de grupos em estudos da reserva girante ... *M. Ferreira de Oliveira* *J. Reis Cardoso*	445-446	12-1-977/78	267
C. D. U. 621.382.4			
Algumas considerações sobre a inclusão do efeito de Early no modelo de Ebers-Moll de transistores bipolares *João Paulo Cacho Teixeira*	444	11-977	97
C. D. U. 621.389:537.311			
Simulação numérica das estatísticas de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein e Fermi-Dirac, baseada num gerador de números pseudoaleatórios [1] ... ... *H. J. S. Abreu Santos*	443	10-977	19
C. D. U. 621.39(469)			
Concepção e projecto de sistemas de telecomunicações no País ... ... *Manuel José Abreu Faro* *Pedro Luís Borges Teixeira*	445-466 477 e 448	12-1-977/78 2-978 3-978	275 389 453
C. D. U. 621.47:517:697.7			
Métodos de simulação numérica de colectores solares planos ... ... *E. Maldonado* *E. Oliveira Fernandes*	444	11-977	65
C. D. U. 621.762:669.1			
Pulverometalurgia de ligas ferrosas ... ... *Carlos Alberto Pacheco da Silva*	445-446	12-1-977/78	327
C. D. U. 621.785:620.163:669.14			
O controle de qualidade nos tratamentos térmicos ... ... *Antera Valeriana de Seabra*	445-446	12-1-977/78	313
C. D. U. 621.785:001.2:669.14			
Necessidade de investigação e de desenvolvimento tecnológico em Portugal na área dos tratamentos térmicos dos aços ... ... *António de Pádua Loureiro*	445-446	12-1-977/78	345

Artigo	N.º	Data	Pág.
C. D. U. 621.791:621.311.2			
Alguns aspectos da tecnologia de soldadura na construção de equipamentos para produção de energia	445-446	12-1-977/78	339
Salgado Prata			
622 — EXPLORAÇÃO DE MINAS E TRATAMENTO DE MINÉRIOS			
C. D. U. 622:371.214			
Nota sobre os cursos universitários portugueses de Engenharia de Minas	445-446	12-1-977/78	181
José Quintino Rogado			
C. D. U. 622.2:519.3			
Optimização do beneficiamento de sistemas de jazidas minerais. Apropriação racional dos recursos minerais	445-446	12-1-977/78	383
José Quintino Rogado			
C. D. U. 622.792+622.798			
Aglomeração de concentrados finos de minérios	445-446	12-1-977/78	349
H. Maia e Costa			
624 — ENGENHARIA CIVIL			
C. D. U. 624:371.214			
Princípios para a reestruturação do ensino da Engenharia Civil	445-446	12-1-977/78	173
António de Caravlho Quintela			
C. D. U. 624:371.214			
O ensino da Engenharia Civil no nosso País ...	445-446	12-1-977/78	169
J. S. Brazão Farinha			
C. D. U. 624.04			
Método directo de distribuição de momentos para o cálculo de estruturas sujeitas a esforços horizontais	443	10-977	47
Alfredo de Pinho Morgado			
C. D. U. 624.057			
Industrialização e qualidade da construção ...	445-446	12-1-977/78	221
José A. Teixeira Trigo			
C. D. U. 624.07[012.4]2			
Betão normal reforçado com armadura metálica	443	10-977	51
	447	2-978	449
	e 448	3 978	505
J. M. Madeira Costa			
C. D. U. 624.07[012.4]8			
Ligações em estruturas prefabricadas de betão	445-446	12-1-977/78	239
S. Pompeu dos Santos			
C. D. U. 624.072.334·1			
Vigas Vierendeel simples	447	2-978	397
J. S. Brazão Farinha			
625 — CAMINHOS DE FERRO E ESTRADAS			
C. D. U. 625.8(661):691.223			
Les chaussées en sables gypseux du Sahara ...	447	2-978	417
José Carlos de O. S. Horta			
627 — CURSOS DE AGUA E CANAIS NATURAIS. RIOS, PORTOS, OBRAS PORTUÁRIAS E COSTEIRAS: BARRAGENS, ETC.			
C. D. U. 627.8.09(679.4)			
A engenharia nacional e a instalação de unidades de grande potência. O caso de Cabora-Bassa	445-446	12-1-977/78	255
Alberto Abecassis Manzanares			
António Carrisso			
António de Carvalho Quintela			
António José da Costa Santos			
João de Salvador Fernandes			
C. D. U. 627.82:627.89			
Desastres de barragens em 1976. O caso de Teton	443	10-977	7
J. Laginha Serafim			
C. D. U. 627.89.007.1:174			
Acidentes em obras de engenharia civil e a responsabilidade dos engenheiros. O caso da barragem de Teton	448	3-978	485
António José Correia Mineiro			
66 — INDÚSTRIAS QUÍMICAS, TECNOLOGIA QUÍMICA			
665 — ÓLEOS, GORDURAS, CERAS			
C. D. U. 665.51/58			
O complexo petroquímico de Sines; concepção e estado actual dos trabalhos	445-446	12-1-977/78	305
João Pedro Antunes Gomes			

Artigo	N.º	Data	Pág.
C. D. U. 665.51/58			
Petroquímica	445-446	12-1-977/78	297
Luís L. Ramalhete			

666 — VIDRO. INDÚSTRIAS CERÂMICAS, ETC.

C. D. U. 666.3/7			
Materiais cerâmicos: microestrutura e propriedades	444	11-977	77
C. A. Pacheco da Silva			
M. Helena Carvalho			
M. Manuela Oliveira			

669 — METALURGIA

C. D. U. 669.1:543.42.64			
Determinação de coeficientes de repartição sólido/líquido em ligas ternárias Fn-Mn-C ...	445-446	12-1-977/78	355
M. Helena de Melo Carvalho			
C. D. U. 669.1:621.762			
Pulverometalurgia de ligas ferrosas	445-446	12-1-977/78	327
Carlos Alberto Pacheco da Silva			
C. D. U. 669.14:621.785:620.163			
O controle de qualidade nos tratamentos térmicos	445-446	12-1-977/78	313
Antera Valeriana de Seabra			
C. D. U. 669.14:621.785:001.2			
Necessidade de investigação e de desenvolvimento tecnológico em Portugal na área dos tratamentos térmicos dos aços	445-446	12-1-977/78	345
António de Pádua Loureiro			

68 — OFÍCIOS, ARTES E INDÚSTRIAS ESPECIALIZADAS PARA ARTIGOS ACABADOS E VESTUÁRIO

681 — MECANISMOS, APARELHOS E MÁQUINAS DE PRECISÃO. INSTRUMENTOS

C. D. U. 681.14.016			
Uma bibliografia de APL — 2.ª parte	447	2-978	431
J. Marques Henriques			

69 — CONSTRUÇÃO DE EDIFÍCIOS, MATERIAIS E PROCESSOS DE CONSTRUÇÃO

C. D. U. 69.002:72.011.1			
Tecnologias da construção de habitação	448	3-978	463
José A. Teixeira Trigo			

691 — MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO

C. D. U. 691.223:625.8(661)			
Les chaussées en sables gypseux du Sahara ...	447	2-978	417
José Carlos de O. S. Horta			

697 — INSTALAÇÕES DE AQUECIMENTO, VENTILAÇÃO E AR CONDICIONADO

C. D. U. 697.7:621.47:517			
Métodos de simulação numérica de colectores solares planos	444	11-977	65
E. Maldonado			
E. Oliveira Fernandes			

699.8 — PROTECÇÃO, IMPERMEABILIZAÇÃO E ISOLAMENTO DAS CONSTRUÇÕES

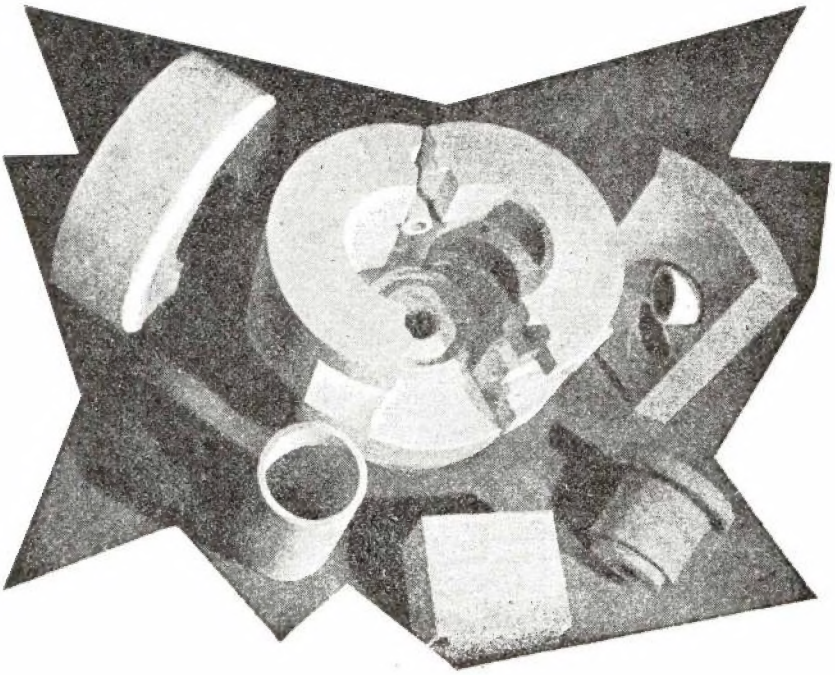
C. D. U. 699.81			
Acção dos incêndios sobre a construção	445-446	12-1-977/78	231
Alfredo Manuel Florenço Tovar de Lemos			
Ildefonso Cabrita Neves			
Joaquim da Conceição Valente			

72 — ARQUITECTURA

C. D. U. 72.011.1			
Necessidades humanas e exigências funcionais da habitação	445-446	12-1-977/78	191
Ruy José Gomes			
C. D. U. 72.011.1:69.002			
Tecnologias da construção de habitação	448	3-978	463
José A. Teixeira Trigo			

a técnica moderna emprega

BETÕES REFRACTÁRIOS



à base dos cimentos

FONDU LAFARGE

e

SECAR 250

porque são

práticos
eficientes
económicos

REFRACTÁRIOS ATÉ 1800° C

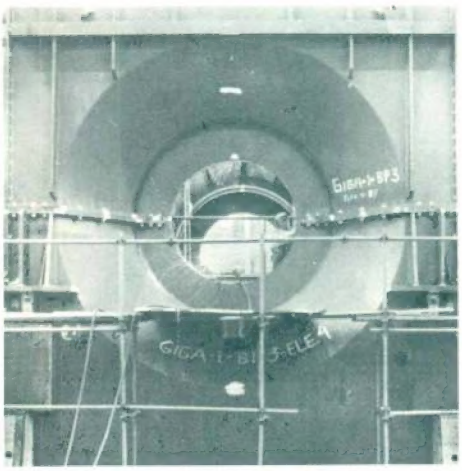
REFRACTÁRIOS ISOLANTES ATÉ 1700° C

Os nossos serviços técnicos, especializados, estão à vossa inteira disposição para estudar, sem qualquer encargo da vossa parte, a adaptação dos **BETÕES REFRACTÁRIOS** a todos os vossos problemas

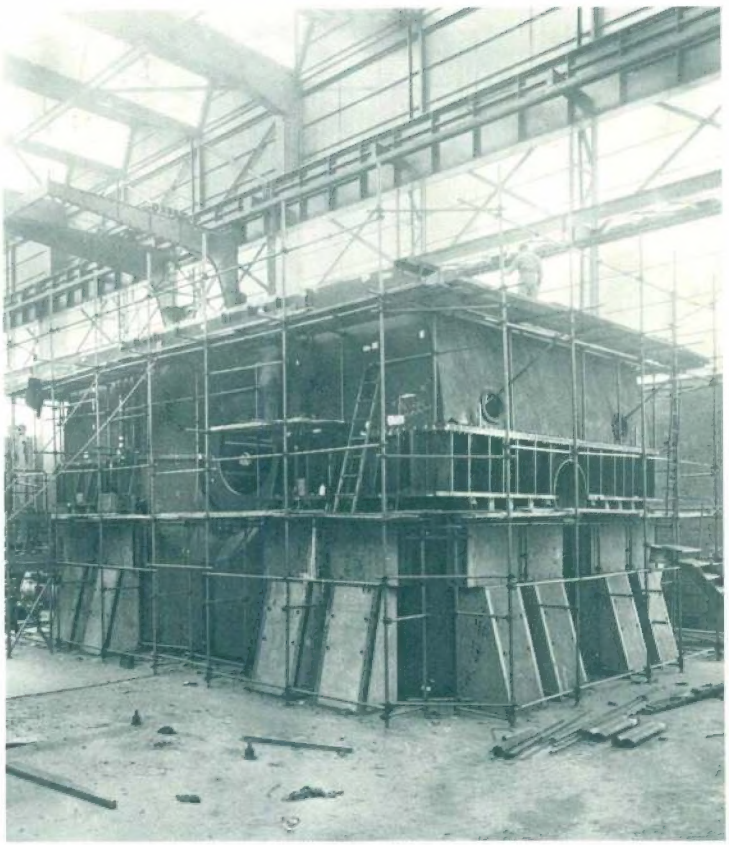
AGUIAR & MELLO L.DA

P. do Municipio, 13-1.º — LISBOA — Tel. 32 11 51/2

A nossa vocação é exportar



Caixa de escape para uma central nuclear, destinada à Electricité de France



EQUIPAMENTOS HIDROMECÂNICOS

EQUIPAMENTOS ELECTROMECÂNICOS PARA CENTRAIS HIDROELÉCTRICAS E TÉRMICAS (CLÁSSICAS E NUCLEARES)

EQUIPAMENTOS PARA A INDÚSTRIA QUÍMICA E PETROLÍFERA

MATERIAL CIRCULANTE DE CAMINHO DE FERRO

EQUIPAMENTO OFFSHORE PARA PROSPECÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

CONSTRUÇÕES MODULADAS, PONTES E ESTRUTURAS

Países para onde temos exportado:

AFRICA DO SUL · ANGOLA · ARGENTINA · BRASIL · COSTA RICA · FRANÇA · GUATEMALA · IRÃO · IRAQUE · ISLÂNDIA KUWEIT · MALAWI · MARROCOS · MÉXICO · MOÇAMBIQUE NICARÁGUA · PAQUISTÃO · RODÉSIA · SUDÃO · TURQUIA UGANDA · U.S.A. · VENEZUELA · ZAIRE

SOREFAME

SOCIEDADES REUNIDAS DE FABRICAÇÕES METÁLICAS, S.A.R.L.
Amadora – Portugal

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA O CALCULO DO BETÃO ARMADO

Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . . 450$00

TOPOGRAFIA GERAL

C. Xerez — 1.º vol. 3.ª edição — 1978 . . 350$00

C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . 250$00

TABELAS TÉCNICAS

Vicente Ferreira e Brazão Farinha, 8.ª edição 1977 500$00

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL

A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . 450$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO

Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 75$00

NÚMEROS E VARIÁVEIS COMPLEXAS

A. H. Simões de Abreu, 1.ª edição 1977 . . 312$50

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS

A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 150$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS

G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 100$00

MANUAL DE ESTRUTURAS

Brazão Farinha — 1.º VOLUME

Encadernado . . . . . 625$00

Plastificado . . . . . 587$50

2.º e 3.º Volumes . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO

(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . 425$00

(*) LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À técnica